

Assunto: Sequências Numéricas.

1. Descubra a o termo geral a_n das seqüências abaixo:

- a) $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$.
- b) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$.
- c) $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots)$.
- d) $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots)$.
- e) $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$.
- f) $(1, 0, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 16, 8, 6, 32 \dots)$.

2. Enuncie todos os critérios dados em sala de aula para estabelecer a convergência de seqüências numéricas.

3. Com os resultados listados acima, estabeleça se as seqüências (a_n) abaixo convergem ou divergem, dizendo qual critério usou. Quando for possível calcule o limite da seqüência.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $a_n = n^{1/3}$ | b) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ | c) $a_n = \text{sen} \frac{\pi}{3^n}$ |
| d) $a_n = (1, 000001)^n$ | e) $a_n = (0, 9999999999)^n$ | f) $a_n = \frac{3^n}{2^n + 10000}$ |
| g) $a_n = \frac{\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n}}$ | h) $a_n = \frac{n}{(\ln n)^{2,5}}$ | i) $a_n = \frac{n}{(\ln n)^{0,5}}$ |
| j) $a_n = n^{(-1)^n}$ | k) $a_n = \frac{n^4}{e^n}$ | l) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ |
| m) $a_n = \cos n\pi$ | n) $a_n = n(1 - \cos(1/n))$ | o) $a_n = n \text{sen} \frac{1}{n}$ |
| p) $a_n = n \tan \frac{1}{n}$ | q) $a_n = \frac{\text{sen}(1+n)}{n!}$ | r) $a_n = n - n^2 \text{sen} \frac{1}{n}$ |
| s) $a_n = (1 + 3n)^{1/n}$ | t) $a_n = \ln(1 - \frac{7}{n})^n$ | u) $a_n = (1 + a/n)^n$ para $a \in R$ |
| v) $a_n = \frac{(-1)^n (\cos n)^{100}}{4^n}$ | x) $a_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}}$ | z) $a_n = 1 + \cos n\pi$ |

4. Quais das seqüências (a_n) abaixo convergem e quais divergem? Encontre o limite de cada seqüência convergente.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $a_n = \frac{n^3 + n + 1}{4n^3 + 2}$ | b) $a_n = \frac{-10n^5 - 7n^2 + n + 5}{6n^6 + 3n^4 + 5n^2 + 3}$ | c) $a_n = \frac{\sqrt{n^4 - 3n + 1}}{2n^2 + 1}$ |
| d) $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$ | e) $a_n = \frac{-\ln(n^2)}{n}$ | f) $a_n = ((-1)^n + 1) \frac{n+1}{n}$ |
| g) $a_n = \frac{1 + \sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$ | h) $a_n = \frac{4^{n+1} + 3^n}{4^n}$ | |

5. Sabendo-se que $(1 + 1/n)^n \rightarrow e$ verifique que

- a) $(1 + 1/n)^{2n} \rightarrow e^2$ b) $(1 + 1/n^2)^{n^2} \rightarrow e$ c) $(1 + 1/(2n))^n \rightarrow \sqrt{e}$ d) $(\frac{n+2}{n+1})^n \rightarrow e$

6. Encontre o limite das seqüências abaixo fazendo a interpretação geométrica das mesmas:

- (a) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx$
- (b) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx, \alpha \neq 1$
- (c) $a_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^2}$
- (d) $a_n = \iint_{A_n} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ para A_n a coroa circular $1/n^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, n \geq 2$.
- (e) $a_n = \iint_{A_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ para A_n a coroa circular $1/n^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, n \geq 2$. Calcule a integral usando coordenadas polares.

7. Prove que $n^{\frac{1}{n}}$ é decrescente para $n \geq 3$.

8. Discuta a convergência ou divergência das seqüências abaixo analisando se são monótonas e/ou limitadas.

- | | | | |
|-------------------------------|---|------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $a_n = \frac{n}{2^n}$ | b) $a_n = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$ | c) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ | d) $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ |
| e) $s_n = \sum_{k=1}^n 1/k^3$ | f) $s_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k}$ | g) $s_n = \sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k}$ | h) $s_n = \sum_{k=1}^n [1/(k(k+1))]$ |

Sugestão $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.

9. Teste da razão e da raiz para convergência de seqüências: Seja $a_n > 0$ para todo n .
- Mostre que se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L$ onde $0 \leq L < 1$ então $a_n \rightarrow 0$. E se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L > 1$ ou $L = \infty$ então $a_n \rightarrow \infty$.
 - Mostre que se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow L$ onde $0 \leq L < 1$ então $a_n \rightarrow 0$. Se $L = \infty$ ou $L > 1$ então $a_n \rightarrow \infty$.
 - Use o item a) e calcule o limite para as seqüências abaixo e veja se é possível determinar quais seqüências a_n convergem para 0? Quais vão para infinito?
- $a_n = n$
 - $a_n = n^2/2^n$
 - $a_n = \frac{n!}{n^n}$
 - $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$
 - $a_n = \sqrt{n} \left(\frac{2n-1}{n^2+13} \right)^n$
 - $a_n = \frac{n!}{n^n}$
 - $a_n = \frac{2^n}{n!}$
 - $a_n = \frac{(2n!)}{n^{2n}}$
 - $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n}$
10. Assuma como verdadeiro o fato de que
 “se $a_n \rightarrow a$ então $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a$ (ver Guidorizzi - vol.4 - pag.4)”
- Conclua então que se $a_n > 0$ e $a_n \rightarrow a > 0$ então $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \rightarrow a$.
 - Verifique que se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L$ então $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow L$. c) Calcule o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ para as seqüências mdo item c) da questão anterior e veja se é possível dizer quais convergem para zero e quais vão para infinito, usando esta técnica. Compare as duas técnicas.
11. Encontre o termo geral a_n para as seqüências abaixo sabendo-se que $a_0 = 1$ e que:
- $a_{n+1} = a_n/3$
 - $a_{n+1} = (1+j)a_n$ (j constante fixa)
 - $a_n = \sum_{k=1}^n (1/3)^k$
 - $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$.
12. a) Suponha que um capital a_0 seja investido numa aplicação que rende juros de 1% ao final de cada mês. Descreva o montante a_n no mês n .
- Calcule o montante após 36 meses de aplicação se $a_0 = R\$1000,00$.
 - Caso você fique devendo R\$ 1000,00 para um banco, que cobre 10% de juros ao mês, qual será sua dívida com o banco no final de 36 meses. (Nunca caia nessa!!!)
13. Seja (a_n) seqüência real e $a \in R$.
- Escreva a definição de $a_n \rightarrow a$.
 - Use a definição para concluir que $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0$.
 - É verdade que $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow |a|$ para $a \neq 0$?
 - Conclua, usando a definição, que se (a_n) é seqüência real tal que $a_n \rightarrow a$ então $a_{n+1} \rightarrow a$.
 - Conclua, usando a definição, que se (a_n) é seqüência real tal que $a_{2n+1} \rightarrow a$ e $a_{2n} \rightarrow a$ então $a_n \rightarrow a$.
14. Indique se a frase é verdadeira ou falsa, dando um contra-exemplo quando for falsa e mostrando a afirmação quando for verdadeira.
- () Toda seqüência a_n limitada $\tilde{\text{A}}\text{C}$ convergente.
 - () Toda seqüência ilimitada é tal que $a_n \rightarrow \infty$ ou $a_n \rightarrow -\infty$.
 - () Se $|a_n| \rightarrow L$ então a_n é convergente
 - () Toda seqüência monótona é convergente.
 - () Toda seqüência monótona crescente é tal que $a_n \rightarrow \infty$.
 - () Toda seqüência monótona decrescente é tal que $a_n \rightarrow -\infty$.
 - () Se duas subseqüências de uma seqüência convergem para o mesmo valor a então a seqüência também converge para a .
 - () Se $a_{2n} \rightarrow a$ e $a_{3n} \rightarrow a$ então $a_n \rightarrow a$.
 - () Se $a_n \rightarrow \infty$ e $b_n \rightarrow 0$ então $a_n b_n \rightarrow 0$ pois qualquer número multiplicado por 0 é 0.
 - A seqüência $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ é crescente e limitada.
15. Sejam a_n e b_n seqüências tais que $|a_n - b_n| \leq e^{-n}$. O que se pode dizer sobre o comportamento de ambas no infinito?
- Verifique que se $a_n \rightarrow a \in R$ então $b_n \rightarrow a$.
 - O que ocorre se uma das seqüências for para ∞ ? Justifique. Sugestão: Lembre da desigualdade triangular.

16. Seja a sequência tal que

$$a_1 = \sqrt{3}, a_2 = \sqrt{3 + 2a_1}, a_3 = \sqrt{3 + 2a_2}, a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}.$$

i) Mostre que a_n é crescente.

ii) Mostre que $0 < a_n < 4$ usando o método da indução finita.

iii) Conclua que existe a tal que $a_n \rightarrow a$ e que $a \geq 0$.

iv) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

17. Para as sequências abaixo:

i) Calcule os 7 primeiros.

ii) Com base no item anterior o que deve ser a_n ?

iii) Use o método da indução finita para confirmar seu palpite no item ii).

a) Seja a sequência (a_n) tal que $a_0 = 1$ e $na_n = a_{n-1}$ para $n \geq 1$.

b) Seja a_n tal que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_{n+2} = \frac{-1}{n+2}a_n$ para $n \geq 0$.

c) Seja a sequência (a_n) tal que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $(n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0$ para $n \geq 1$.

d) Seja a sequência (a_n) tal que $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Suponha ainda que

$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+1)a_n = 0$ para $n \geq 0$.

OBS: Este exercício será utilizado na resolução de equações diferenciais via séries de Taylor e séries de Fourier.

18. (Método de Newton) A sequência a seguir é definida pela fórmula recursiva dada pelo método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Em cada item a seguir, responda se a sequência converge. Em caso afirmativo, qual é o valor do limite? Em cada caso, comece identificando a função f envolvida:

(a) $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$.

(b) $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n - \frac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}$.

(c) $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n - 1$.