1a. Lista de Exercícios de SMA333 – 05/03/2013

1. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, sendo a_n igual a:

   (a) $2 + (0.1)^n$

   (b) $\dfrac{1-2n}{1+2n}$

   (c) $\dfrac{n^2-2n+1}{n-1}$

   (d) $1 + (-1)^n$

   (e) $\sqrt{\dfrac{2n}{n+1}}$

   (f) $\dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

   (g) $\sqrt[n]{10n}$

   (h) $\dfrac{\ln n}{\sqrt[n]{n}}$

   (i) $\dfrac{n!}{n^n}$ (*Sugestão:* compare com $1/n$)

   (j) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   (k) $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n$ (*Sugestão:* lembre-se $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$)

   (l) $\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

   (m) $\int\limits_1^n \dfrac{1}{x^\alpha} dx$, sendo α um número real dado.

   (n) $\int\limits_0^n \dfrac{1}{1+x^2} dx$

   (o) $\dfrac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$

   (p) $\dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+2n+1}}$

   (q) $nsen\dfrac{1}{n}$

   (r) $sen\dfrac{1}{n}$

(s) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \arctan n$

(t) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \right)$

(u) $\dfrac{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}{n}$

(v) $\dfrac{2 + 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{3}} + ... + 2^{\frac{1}{n}}}{n}$

(w) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k}$

(x) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$

(y) $\int_1^n \dfrac{1}{x^p} dx$, onde $p > 0$. Estude separadamente os casos $0 < p < 1$, $p = 1$ e $p > 1$.

(z) $\dfrac{1}{n} \int_1^n \dfrac{1}{x} dx$

2. Dado um número real r, estude a sequência (r^n) quanto a sua convergência ou divergência. (*Sugestão:* use a definição de limite e estude separadamente os casos $|r| < 1$; $|r| > 1$; $r = 1$; $r = -1$).

3. Suponha que exista $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_1.$$

Prove que:

(a) Se $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ então $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$

(b) Se $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = -\infty$ então $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

4. Considere a sequência:

$$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...$$

(a) Verifique que (a_n) é crescente e limitada superiomente por 2

(b) Calcule $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$

5. Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$, a_n pertence ao conjunto $\{0, 1, 2, ..., 9\}$. A sequência de termo geral $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ é convergente ou divergente? Justifique.

6. Seja (a_n) uma sequência de números reais satisfazendo

$$|a_{n+1}| \leq K|a_n|, \quad \forall n \geq N,$$

onde K é uma constante, com $0 < K < 1$. Mostre que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

7. Seja (a_n) uma sequência de números reais não nulos tais que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$$

Mostre que se $|L| < 1$, então (a_n) é convergente e tem limite zero. (*Sugestão:* use o exercício anterior.)

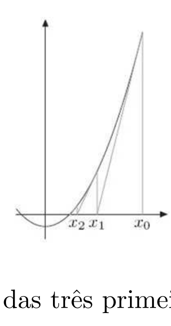
Verifique que esse resultado é falso se $|L| = 1$, exibindo um contra-exemplo.

8. Determine se a sequência é crescente e se possui limitante superior.

   (a) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$
   (b) $a_n = \frac{2^n 3^n}{n!}$
   (c) $a_n = \sum_{k=0}^{n} [1 + (-1)^k]$

9. (Método de Newton) As sequência a seguir é definida pela fórmula recursiva dada pelo método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



(Figura 1: Ilustração das três primeiras iterações do método de Newton)

Em cada item a seguir, responda se a sequência converge. Em caso afirmativo, qual é o valor do limite? Em cada caso, comece identificando a função f envolvida:

(a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n}$.

(b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}$.

(c) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n - 1$.