USP/ICMC/SMA - 3ª Lista de SMA-0333 - CÁLCULO III.
Séries de Potências-Séries de Taylor.

1. Determine os intervalos de convergência das séries abaixo:
   $a)\ \sum \frac{x^n}{n^2} \quad b)\ \sum e^{nx} \quad c)\ \sum 2^n x^n \quad d)\ \sum x^n sen\frac{1}{n} \quad e)\ \sum(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

2. Verifique que as séries abaixo convergem absolutamente nos intervalos dados:
   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ em $[-r;r]$, $\forall r > 0$.
   b) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ em $[-r;r]; 0 < r < 1/2$
   c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}$ em $[-r;r]; 0 < r < 1$.

3. Determine o intervalo de convergência das séries de potências abaixo:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n+1}{n^4+1} x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$
   e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{n+1}$ f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n n^n$. h) $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) x^k$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$

4. Determine os intervalos de convergência das séries abaixo e diga em qual valor elas estão centradas:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (x-4)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n+1}{n^4+1} (x+3)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} n(3x+6)^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x-6)^{2n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (\frac{2x-4}{3})^n$.

5. Seja $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) x^k$. Verifique que para todo $t \in]-1;1[$ tem-se $\int_0^t s(x)dx = \frac{t^2}{1-t}$.
   Conclua então que se $x \in]-1;1[$ temos $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) x^k = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$.

6. a) Considere a função $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$ e então descreva seu domínio.
   b) Justifique em que intervalo vale a igualdade $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n^3}$.

7. Use a definição para determinar as séries de Maclaurin das funções abaixo fornecendo seus intervalos de convergência:
   a) $f(x) = e^{2x}$ b) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 7x - 1$ c) $f(x) = sen\ x$
   d) $f(x) = cos\ x$ e) $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

8. Antes de começar o exercício liste as cinco séries de funções mais conhecidas que vimos e escreva-as em séries de potências de x, dando seus respectivos raios de convergências. Utilize estes fatos para escrever a série de Mclaurin das funções abaixo, escrevendo seus respectivos raios de convergência.

$a)\ f(x) = 3 - x^2 + 7x^4 - x^5$ $b)\ f(x) = \frac{x}{1-x^3}$ $c)\ f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$
$d)\ f(x) = ln(1+2x)$ $e)\ f(x) = x^2 ln(1+2x)$ $f)\ f(x) = \arctan x$
$g) f(x) = xe^{x^2}$ $h)\ f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$ $i)\ f(x) = x^2 senx$
$j)\ f(x) = cos^2 x$ $k)\ f(x) = \frac{cosx-1}{x^2}$ $l)\ f(x) = senxcos2x$
$m)\ f(x) = (1+x^2)cosx$ $n)\ f(x) = coshx$ $o) f(x) = senhx$
$p)\ f(x) = ln(1-x)$ $q)\ f(x) = (1-x)ln(1+x)$ $r)\ f(x) = \arctan x^2$
$s)\ f(x) = \frac{sen\ x}{x}$ $t)\ f(x) = (1-x^2)^{-1}$ $u)\ f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$
$v)\ f(x) = arc\ senx$ $w)\ f(x) = (1-x)^{2/3}$ $x)\ f(x) = -(1-x)^{-1/3}$
$y)\ f(x) = e^{x^2} - x$ $z)\ f(x) = e^x - e^{-x}$

9. Determine $f^{(3)}(0)$ para cada uma das funções do exercício 8) usando somente a informação dada pela sua série. OBS: Note que algumas destas funções podem não estar definidas originalmente em $x = 0$. Mas suas séries de potências indicam que podemos calcular f e suas derivadas de quaisquer ordens em $x = 0$. Identifique as funções onde isso ocorre.

10. Expresse as séries abaixo através de um somatório. Então, inspirados nas séries de Mclaurin conhecidas das quatro funções elementares MAIS DISCUTIDAS em sala de aula, verifique para quais valores S as séries dadas convergem. JUSTIFIQUE. OBS. Cada uma das séries abaixo é o valor de uma série conhecida avaliada num ponto específico.

    a) $S = \frac{-1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{-1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$.
    b) $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \frac{5}{81} + \ldots$.
    c) $S = \frac{-1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{-1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$.
    d) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9\cdot 2!} + \frac{1}{27\cdot 3!} + \frac{1}{81\cdot 4!} + \ldots$.
    e) $S = \frac{1}{2.2!} + \frac{1}{4.3!} + \frac{1}{8.4!} + \frac{1}{16.5!} \ldots$.
    f) $S = \frac{e}{3} - \frac{e^2}{3^2 2} + \frac{e^3}{3^3 3} - \frac{e^4}{3^4 4} + \frac{e^5}{3^5 5} \ldots$.
    g) $S = \frac{-\pi^2}{4^2\cdot 2!} + \frac{\pi^4}{4^4\cdot 4!} + \frac{-\pi^6}{4^6\cdot 6!} + \ldots$.
    h) $S = \frac{-1}{2} + \frac{1}{4\cdot 2} + \frac{-1}{8\cdot 3} + \frac{1}{16\cdot 4} + \ldots$.

11. A) Com base nas séries de Maclaurin das funções mais discutidas em sala de aula, e de suas propriedades, escreva a série de Maclaurin das funções abaixo, sem:

$$a)\ f(x) = \frac{sen\, x^2}{x^2} \quad b)\ f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \quad c)\ f(x) = \frac{sen\, x - x}{x^3}$$
$$d)\ f(x) = \frac{\ln(1+x) - 1}{x} \quad e)\ f(x) = \frac{xcosx - senx}{x^3} \quad f)\ f(x) = \frac{cos\ x - 1}{x^2}.$$
$$g)\ f(x) = \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}.$$

B) Com as séries encontradas no item A) diga, SEM EFETUAR o cálculo do limite, quais os valores de:

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x^2}{x^2} \quad b) \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad c) \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x - x}{x^3}.$$
$$d) \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - 1}{x}. \quad e) \lim_{x\to 0} \frac{xcosx - senx}{x^3}. \quad f) \lim_{x\to 0} \frac{cos\ x - 1}{x^2}.$$
$$g) \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}.$$

C) Use o item A) para determinar $f^{(3)}(0)$, sem efetuar cálculo algum.

12. Determine a série de Taylor de $f(x) = senx$ em torno de $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

13. a) Use a série de Maclaurin de $f(x) = e^x$ para então deduzir como é a série de Taylor de f em torno de $x_0 = 1$.

    b) Use a série de Maclaurin de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para deduzir como é a série de $f(x) = \frac{1}{x}$ em torno de $x_0 = 1$.

    c) Use a série de Maclaurin de $f(x) = e^x$ para deduzir a série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ de $f(x) = (1 - x^2)e^{-x^2}$

14. Para as funções e x_0 do exercício anterior encontre $f^{(45)}(x_0)$.

15. Mostre que para $|x| < 1$ tem-se $ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$.

16. Determine o valor das expressões abaixo com erro inferior a 0.01 (recorde a teoria de séries alternadas):

    a) $\int_0^{1/2} e^{-t^3} dt$ b) $\int_0^1 \frac{sent}{t} dt$. c) $\int_0^1 cos\sqrt{t} dt$

17. Aproxime as funções abaixo pelo seu polinômio de Taylor de grau 3 em torno de $x_0 = 0$ no intervalo $[-1, 1]$ e calcule o erro máximo cometido ao fazer tal aproximação. Repita o exercício para o polinômio de Taylor de grau 4.

    a) $f(x) = e^x$, b) $f(x) = e^{x^2}$, c) $f(x) = cosx$, d) $f(x) = (1 + x)^{-3}$.

18. Use a expansão em Série de Taylor de $f(y) = e^y$ para concluir a fórmula de Euler, isto é, $e^{ix} = cosx + isenx$; onde $i = \sqrt{-1}$.

19. Use séries de potências para determinar as soluções dos seguintes problemas:

    I) a) $y' = 2xy$, $y(0) = a$ b) $y' + y = 1$ $y(0) = a$ c) $y' - y = x^2$, $y(0) = a$ d) $xy' = y$, $y(0) = a$.

    II) Nos exercícios abaixo use que $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$:

    e) $y'' + xy' + y = 0$ f) $y'' - y' + xy = 0$ g) $y'' + 2xy' - y = 0$ h) $y'' + y' - x^2y = 1$

    i) $y'' - 2xy' - x = e^{t^2}$ j) $y'' - y = -2sen\ t$ k) $y'' + y = -2sen\ t$.