

Métodos de Ordenação

Parte 4

SCC-601 Introdução à Ciência da Computação II

Rosane Minghim
2010

Baseado no material dos Professores Rudinei Goularte e Thiago Pardo

1

Ordenação por Intercalação

- Revisando...
 - Também chamado merge-sort
 - Idéia básica: dividir para conquistar
 - Um vetor v é dividido em duas partes, recursivamente
 - Cada metade é ordenada e ambas são intercaladas formando o vetor ordenado
 - Usa um vetor auxiliar para intercalar

2

Ordenação por Intercalação

5 2 4 7 | 1 3 2 6

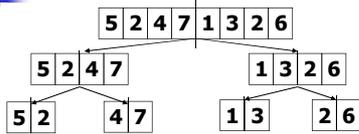
3

Ordenação por Intercalação

5 2 4 7 | 1 3 2 6
5 2 4 7 1 3 2 6

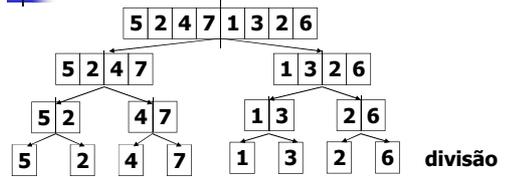
4

Ordenação por Intercalação



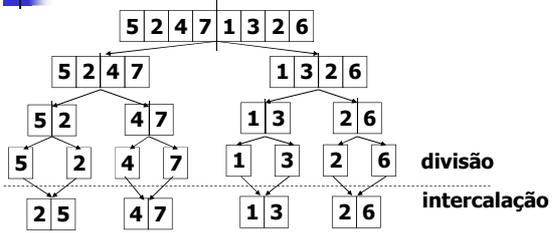
5

Ordenação por Intercalação



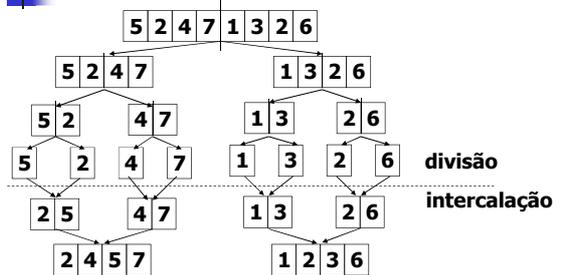
6

Ordenação por Intercalação



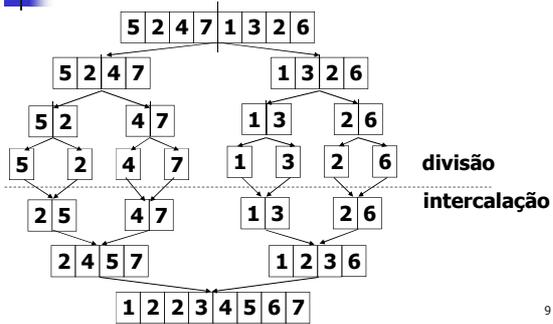
7

Ordenação por Intercalação



8

Ordenação por Intercalação



9

Ordenação por Intercalação

- Qual a complexidade de tempo?
- E a complexidade de espaço?

10

Ordenação por Contagem de Menores

- Idéia básica: se soubermos quantos são os elementos menores que um determinado valor, saberemos a posição que o mesmo deve ocupar no arranjo ordenado
 - Por exemplo, se há 3 valores menores do que o elemento de chave 7, ele será inserido na 4ª posição do arranjo.
- Usa-se um arranjo auxiliar para manter a contagem de menores e um outro para montar o arranjo ordenado

11

Ordenação por Contagem de Menores

- Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	2	1	3	7	9	8	3	0	5

Arranjo original A desordenado

12

Ordenação por Contagem de Menores

- 1º. Passo: criar arranjo auxiliar

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	2	1	3	7	9	8	3	0	5

Arranjo original A desordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Arranjo auxiliar X, em que $X[i]$ =número de elementos no arranjo A que são menores que $A[i]$ → indicam a posição correta de $A[i]$ no arranjo ordenado

13

Ordenação por Contagem de Menores

- 1º. Passo: criar arranjo auxiliar

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	2	1	3	7	9	8	3	0	5

Arranjo original A desordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2	1	3	7	9	8	3	0	6

Arranjo auxiliar X, em que $X[i]$ =número de elementos no arranjo A que são menores que $A[i]$ → indicam a posição correta de $A[i]$ no arranjo ordenado

14

Ordenação por Contagem de Menores

- 2º. Passo: montar arranjo final ordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	2	1	3	7	9	8	3	0	5

Arranjo original A desordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2	1	3	7	9	8	3	0	6

Arranjo auxiliar X, em que $X[i]$ =número de elementos no arranjo A que são menores que $A[i]$ → indicam a posição correta de $A[i]$ no arranjo ordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Arranjo final B ordenado: $A[i]$ vai para a posição $X[i]$ de B
→ Atenção com elemento 3 duplicado

15

Ordenação por Contagem de Menores

- 2º. Passo: montar arranjo final ordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	2	1	3	7	9	8	3	0	5

Arranjo original A desordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2	1	3	7	9	8	3	0	6

Arranjo auxiliar X, em que $X[i]$ =número de elementos no arranjo A que são menores que $A[i]$ → indicam a posição correta de $A[i]$ no arranjo ordenado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	7	8	9	

Arranjo final B ordenado: $A[i]$ vai para a posição $X[i]$ de B
→ Atenção com elemento 3 duplicado

16

Ordenação por Contagem de Menores

■ Exercício

- Implementar em C sub-rotina principal
- Calcular complexidade

17

Ordenação por Contagem de Menores

```
void contagem_de_menores(int A[], int n)
{
    int X[n], B[n], i, j;
    for (i = 0; i < n; i++) //inicializando arranjo auxiliar
        X[i] = 0;
    for (i = 1; i < n; i++) //contando menores
        for (j = i-1; j >= 0; j--)
            if (A[i] < A[j])
                X[j] += 1;
            else X[i] += 1;
    for (i = 0; i < n; i++) //montando arranjo final
        B[X[i]] = A[i];
    for (i = 0; i < n; i++) //copiando arranjo final para original
        A[i] = B[i];
}
```

18

Ordenação por Contagem de Menores

- Exercício: executar algoritmo para o vetor abaixo

0	1	2	3	4
16	2	1	8	2

19

Ordenação por Contagem de Menores

- Complexidade de tempo?
- Complexidade de espaço?

20

Ordenação por Contagem de Menores

- Complexidade de tempo?
 - $O(n^2)$
- Complexidade de espaço?
 - $O(3n)$

21

Ordenação por Contagem de Tipos

- Também chamado counting-sort
- Idéia básica: conta-se o número de vezes que cada elemento ocorre no arranjo; se há k elementos antes dele, ele será inserido na posição $k+1$ do arranjo ordenado
 - Restrição: os elementos devem estar contidos em um intervalo $[\min, \max]$ do conjunto de números inteiros positivos
- Usa-se um arranjo auxiliar para manter a contagem de tipos e um outro para montar o arranjo ordenado

22

Ordenação por Contagem de Tipos

- Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	7	6	3	1	2	1	7

Arranjo original A desordenado
→ min=1, max=7

23

Ordenação por Contagem de Tipos

- Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	7	6	3	1	2	1	7

Arranjo original A desordenado
→ min=1, max=7

1	2	3	4	5	6	7

Arranjo auxiliar X, em que $X[i]$ indica o número de elementos i no vetor original A

24

Ordenação por Contagem de Tipos

■ Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	7	6	3	1	2	1	7

Arranjo original A desordenado
→ min=1, max=7

1	2	3	4	5	6	7
3	2	2	0	0	1	2

Arranjo auxiliar X, em que X[i] indica o número de elementos i no vetor original A
→ há 3 elementos 1, que ocuparão as posições 0, 1 e 2 do vetor ordenado
→ há 2 elementos 2, que ocuparão as posições livres seguintes (3 e 4) ...

25

Ordenação por Contagem de Tipos

■ Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	7	6	3	1	2	1	7

Arranjo original A desordenado
→ min=1, max=7

1	2	3	4	5	6	7
3	2	2	0	0	1	2

Arranjo auxiliar X, em que X[i] indica o número de elementos i no vetor original A
→ há 3 elementos 1, que ocuparão as posições 0, 1 e 2 do vetor ordenado
→ há 2 elementos 2, que ocuparão as posições livres seguintes (3 e 4) ...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Arranjo final B ordenado

26

Ordenação por Contagem de Tipos

■ Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	7	6	3	1	2	1	7

Arranjo original A desordenado
→ min=1, max=7

1	2	3	4	5	6	7
3	2	2	0	0	1	2

Arranjo auxiliar X, em que X[i] indica o número de elementos i no vetor original A
→ há 3 elementos 1, que ocuparão as posições 0, 1 e 2 do vetor ordenado
→ há 2 elementos 2, que ocuparão as posições livres seguintes (3 e 4) ...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	2	2	3	3	6	7	7

Arranjo final B ordenado

27

Ordenação por Contagem de Menores

■ Exercício em grupos de 4 alunos

- Implementar em C sub-rotina principal
- Calcular complexidade

28

Ordenação por Contagem de Tipos

```
void countingsort(int A[], int n)
{
    int B[n], i, j, max;
    max=A[0]; //determinando max
    for (i=1; i<n; i++)
        if (A[i]>max)
            max=A[i];
    int X[max+1];

    //inicializando arranjo auxiliar
    for (i=0; i<max+1; i++)
        X[i]=0;

    //contando tipos
    for (i=0; i<n; i++)
        X[A[i]]++;

    //montando arranjo final
    j=0;
    for (i=0; i<max+1; i++)
        while (X[i]!=0) {
            B[j]=i;
            j++;
            X[i]--;
        }

    //copiando arranjo final para original
    for (i=0; i<n; i++)
        A[i]=B[i];
}
```

29

Ordenação por Contagem de Tipos

- Complexidade de tempo?
- Complexidade de espaço?

30

Ordenação por Contagem de Tipos

- Complexidade de tempo?
 - $O(n)$, se $\text{max} \leq n$
 - Por que é "tão melhor" do que outros métodos?
- Complexidade de espaço?
 - $O(3n)$, se $\text{max} \leq n$

31

Ordenação de raízes

- Também chamado radix-sort
- Idéia básica: os números são ordenados por seus dígitos, dos menos significativos para os mais significativos
 - Por exemplo, ordenar os números 236 e 235 implica comparar os últimos dígitos 6 e 5 dos dois; se não bastar, comparam-se os dígitos do meio; por fim, comparam-se os mais significativos
- Baseado na forma de funcionamento das antigas perfuradoras de cartões

32

Ordenação de raízes

- Utilizam-se listas encadeadas
 - Uma fila para cada dígito
 - Os números vão sendo inseridos na fila de acordo com o dígito sendo avaliado
 - A cada iteração, os números estão mais próximos da ordenação final

33

Ordenação de raízes: exemplo (1ª. iteração)

Arquivo original								
	25	57	48	37	12	92	86	33
Filas baseadas no dígito menos significativo.								
	Início			Final				
fila [0]								
fila [1]								
fila [2]		12			92			
fila [3]		33						
fila [4]								
fila [5]	25							
fila [6]	86							
fila [7]	57				37			
fila [8]	48							
fila [9]								
Depois da primeira passagem.								
	12	92	33	25	86	57	37	48

34

Ordenação de raízes: exemplo (2ª. iteração)

Filas baseadas no dígito mais significativo.								
	Início			Final				
fila [0]								
fila [1]	12							
fila [2]	25							
fila [3]	33		37					
fila [4]	48							
fila [5]	57							
fila [6]								
fila [7]								
fila [8]	86							
fila [9]	92							
Arquivo classificado: 12 25 33 37 48 57 86 92								

35

Ordenação de raízes

- Para os números do arranjo terem o mesmo número de dígitos, pode-se completá-los com zeros à esquerda
 - Por exemplo, 026 e 235
- Quantas iterações são necessárias para ordenar o arranjo?

36

Ordenação de raízes

- Para os números do arranjo terem o mesmo número de dígitos, pode-se completá-los com zeros à esquerda
 - Por exemplo, 026 e 235
- Quantas iterações são necessárias para ordenar o arranjo?
 - São necessárias m iterações no máximo, sendo m o número de dígitos do maior número

37

Ordenação de raízes

■ Algoritmo

```
for (k = digito menos significativo;
     k <= digito mais signif; k++) {
  for (i = 0; i < n; i++) {
    y = x[i];
    j = kesimo digito de y;
    posiciona y no final da fila[j];
  } /* fim for */
  for (qu = 0; qu < 10; qu++)
    coloca elems da fila[qu] na prox posicao sequencial
    de x;
} /* fim for */
```

38

Ordenação de raízes

- Qual a complexidade de tempo do método?
- Qual a complexidade de espaço?

39

Ordenação de raízes

- Qual a complexidade de tempo do método?
 - $O(m*n)$
 - Se m pequeno, $O(n)$
- Qual a complexidade de espaço?
 - Além do vetor, devem-se contar os espaços para as filas, ponteiros, etc.

40

Comparação entre os métodos mais conhecidos

- Ordem aleatória dos elementos
 - O mais rápido recebe valor 1 e o restante é recalculado em função disso

	500	5.000	10.000	30.000
Inserção	11,3	87	161	–
Seleção	16,2	124	228	–
<i>Shellsort</i>	1,2	1,6	1,7	2
<i>Quicksort</i>	1	1	1	1
<i>Heapsort</i>	1,5	1,6	1,6	1,6

Ziviani, 2007

41

Comparação entre os métodos mais conhecidos

- Ordem ascendente dos elementos (já ordenado)

	500	5.000	10.000	30.000
Inserção	1	1	1	1
Seleção	128	1.524	3.066	–
<i>Shellsort</i>	3,9	6,8	7,3	8,1
<i>Quicksort</i>	4,1	6,3	6,8	7,1
<i>Heapsort</i>	12,2	20,8	22,4	24,6

Ziviani, 2007

42

Comparação entre os métodos mais conhecidos

- Ordem descendente dos elementos

	500	5.000	10.000	30.000
Inserção	40,3	305	575	–
Seleção	29,3	221	417	–
<i>Shellsort</i>	1,5	1,5	1,6	1,6
<i>Quicksort</i>	1	1	1	1
<i>Heapsort</i>	2,5	2,7	2,7	2,9

Ziviani, 2007

43

Comparação entre os métodos mais conhecidos

- Quick-sort é o mais rápido para todos os arranjos com elementos aleatórios
- Heap-sort e quick-sort têm uma diferença constante, sendo o heap-sort mais lento
- Para arranjos pequenos, shell-sort é melhor do que o heap-sort
- O método da inserção direta é mais rápido para arranjos ordenados
- O método da inserção direta é melhor do que o método da seleção direta para arranjos com elementos aleatórios
- Shell-sort e quick-sort são sensíveis em relação às ordenações ascendentes e descendentes
- Heap-sort praticamente não é sensível em relação às ordenações ascendentes e descendentes

44

Métodos de ordenação

- Outros métodos
 - Shake-sort ou método da coqueteleira
 - Melhoria do bubble-sort
 - Tree-sort ou método da árvore binária
 - Bucket-sort ou método do balde

45

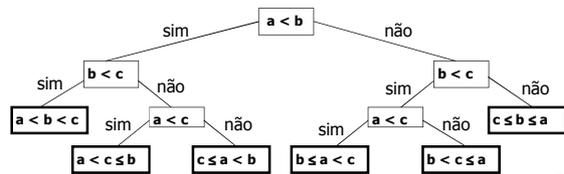
Cota Inferior para Ordenação

- Cota (ou limite) inferior do problema
 - Prova-se que é impossível resolver o problema em menos que $C(n)$ passos para uma entrada de tamanho n
 - Algoritmo ótimo: resolve problema em tempo igual à cota inferior

46

Cota Inferior para Ordenação

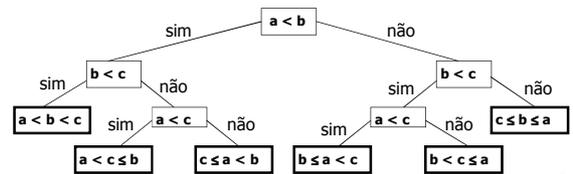
- Cota inferior dos métodos de ordenação por comparação de elementos
 - Pode-se montar uma árvore de decisão para representar o problema
 - Exemplo: ordenação de três elementos a, b e c



47

Cota Inferior para Ordenação

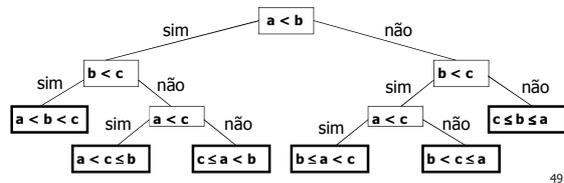
- No mínimo, quantas folhas existem nessa árvore, assumindo um arranjo de tamanho n ?
 - Ou: quantas possibilidades de ordenação existem?



48

Cota Inferior para Ordenação

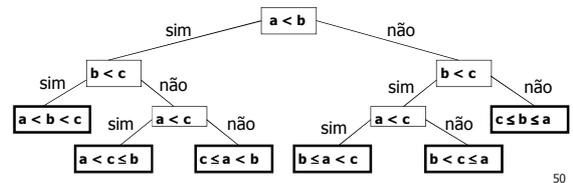
- No mínimo, quantas folhas existem nessa árvore, assumindo um arranjo de tamanho n ?
 - Ou: quantas possibilidades de ordenação existem?
 - $n!$



49

Cota Inferior para Ordenação

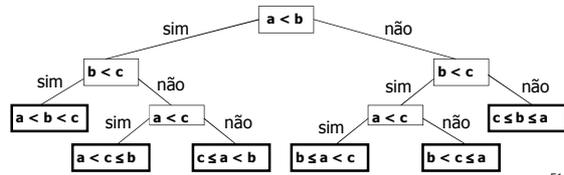
- Quantas comparações devem ser feitas para ordenar n elementos?



50

Cota Inferior para Ordenação

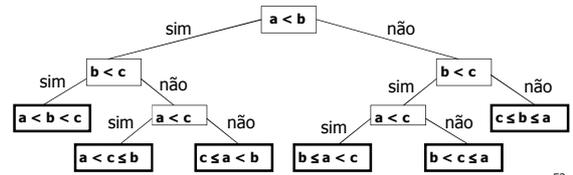
- Quantas comparações devem ser feitas para ordenar n elementos?
 - A altura máxima da árvore de decisão, aproximadamente



51

Cota Inferior para Ordenação

- Sabe-se que uma árvore binária de altura h não tem mais do que 2^h folhas
 - Altura 3: $2^3 \rightarrow 8$ folhas no máximo



52

Cota Inferior para Ordenação

- Número máximo de folhas de uma árvore binária de altura h : 2^h
- Número de folhas de uma árvore de decisão para ordenação por comparação: $n!$
- Portanto:
 - $2^h \geq n!$

53

Cota Inferior para Ordenação

- Número máximo de folhas de uma árvore binária de altura h : 2^h
- Número de folhas de uma árvore de decisão para ordenação por comparação: $n!$
- Portanto:
 - $2^h \geq n!$
 - Representando via logaritmo: $h \geq \log(n!)$

54

Cota Inferior para Ordenação

- Número máximo de folhas de uma árvore binária de altura h : 2^h
- Número de folhas de uma árvore de decisão para ordenação por comparação: $n!$
- Portanto:
 - $2^h \geq n!$
 - Representando via logaritmo: $h \geq \log(n!)$
 - Aproximação de Stirling: $\log(n!) = O(n \log(n))$

55

Cota Inferior para Ordenação

- Número máximo de folhas de uma árvore binária de altura h : 2^h
- Número de folhas de uma árvore de decisão para ordenação por comparação: $n!$
- Portanto:
 - $2^h \geq n!$
 - Representando via logaritmo: $h \geq \log(n!)$
 - Aproximação de Stirling: $\log(n!) = O(n \log(n))$
 - Resultando que $h \geq \log(n!) \rightarrow h \geq n \log(n) \rightarrow h = \Omega(n \log(n))$

56



Cota Inferior para Ordenação

- Resultado
 - Métodos de ordenação por comparação de elementos não podem ser melhores do que $O(n \log(n))$