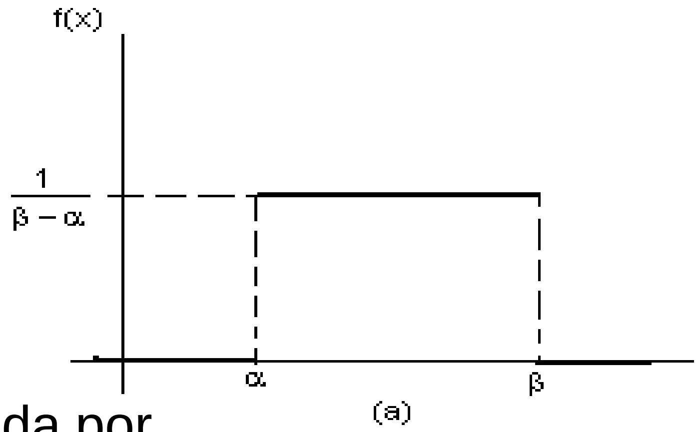
5. PRINCIPAIS MODELOS CONTÍNUOS

2012

5.1. Modelo uniforme

Uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme com parâmetros α e β ($\alpha < \beta$) se sua função densidade de probabilidade é dada por

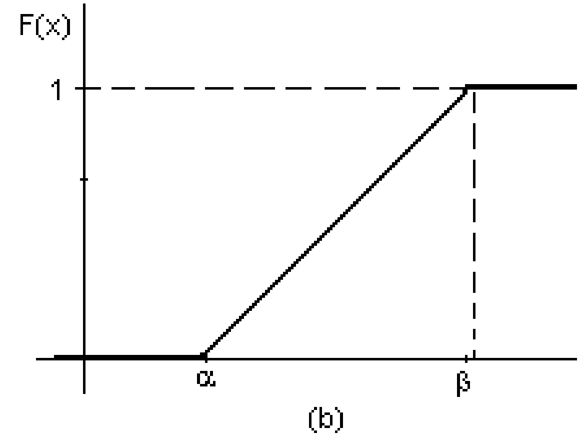
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Notação: X ~ U(α , β).

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < \alpha, \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \text{se} \quad \alpha \leq x \leq \beta, \\ 1, & \text{se} \quad x > \beta. \end{cases}$$



Propriedades:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}.$$

Exemplo

A dureza de uma peça de aço pode ser pensada como sendo uma variável aleatória uniforme no intervalo (50,70) unidades. Qual a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60?

Solução. X representa a dureza de uma peça de aço, sendo que X ~ U(50, 70) e

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, & 50 \leq x \leq 70, \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

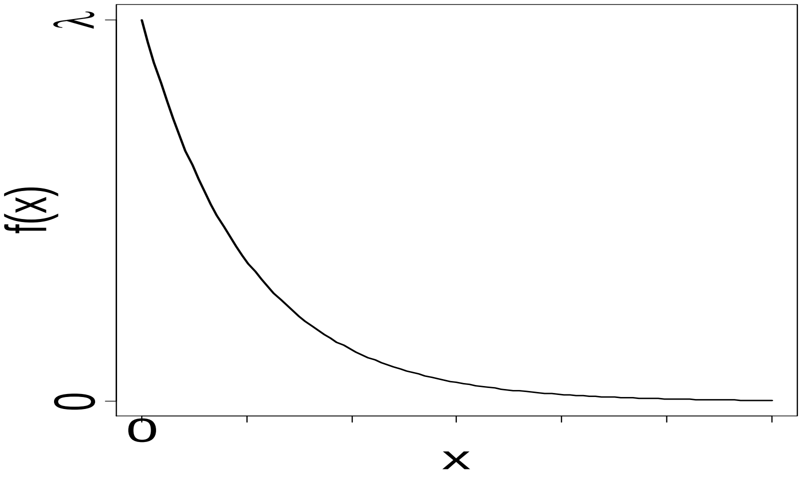
Portanto,

$$P(55 < X < 60) = \int_{55}^{60} \frac{1}{20} dx = \frac{5}{20} = 0{,}25.$$

5.2. Modelo exponencial

Uma v.a. contínua X tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua função de densidade é dada por

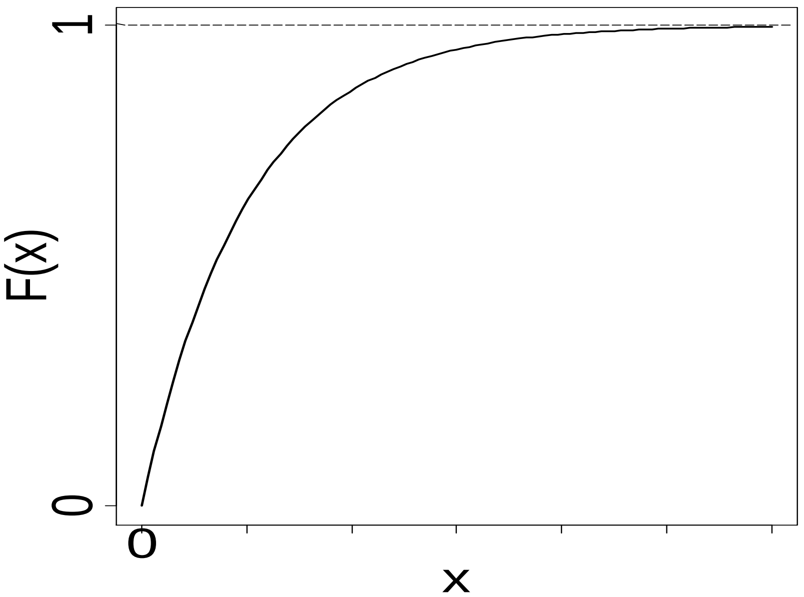
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Notação: $X \sim Ex(\lambda)$.

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Propriedades:

$$\mathrm{E}(X) = 1/\lambda \ \text{ e } \ \mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2.$$

5.2. Modelo exponencial

Propriedade. Se X ~ Ex(λ), então P(X > a + b| X > b) = P(X > a).

É a única distribuição contínua com esta propriedade ("falta de memória").

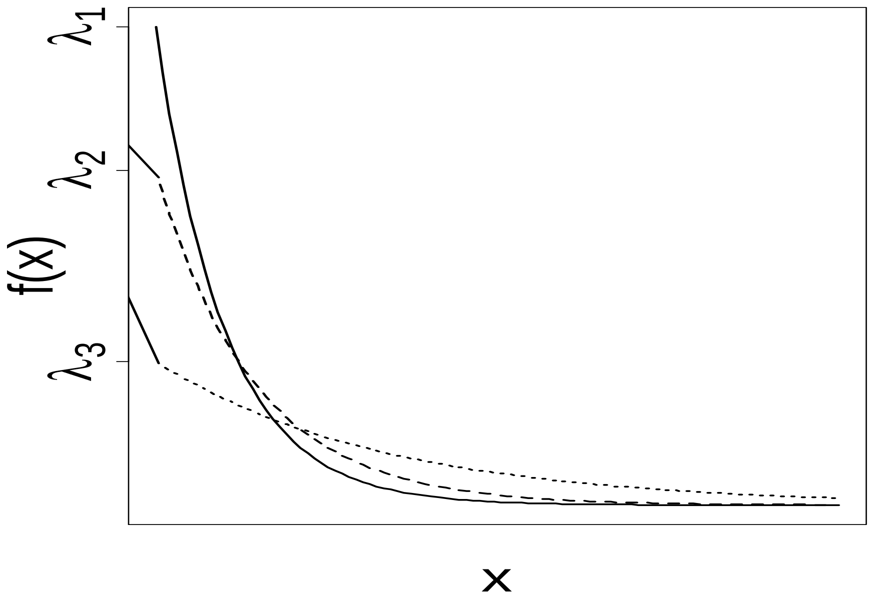
Observação. Também encontramos X ~ Ex(α), em que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Relação: $\alpha = 1 / \lambda$.

α: escala e λ: taxa.

Exemplo. Diferentes valores de λ.



Exemplo

O tempo de vida de um tipo de fusível segue uma distribuição exponencial com vida média de 100 horas. Cada fusível tem um custo de $10,0 e se durar menos de 200 horas há um custo adicional de $8,0.

(a) Qual é a probabilidade de um fusível durar mais de 150 horas?

(b) Determinar o custo esperado.

Solução. Se X é o tempo de vida de um fusível, temos E(X) = 100 horas, λ = 1 / E(X) = 0,01 e X ~ Ex(0,01). Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{100}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$(a)\ \ P(X > 150) = 1 - P(X \leq 150) = 1 - (1 - e^{-\frac{150}{100}}) = e^{-1,5} = 0,223.$$

Exemplo

(b) O custo C é uma v.a. discreta dada por

$$C(X)=\begin{cases} 10, & \text{se } X \geq 200, \\ 10+8, & \text{se } X < 200. \end{cases}$$

O custo esperado (custo médio) é E(C) = 10 $\times$ P(C = 10) + 18 $\times$ P(C = 18). Usando a variável X calculamos

$$P(C=10)=P(X\geq 200)=1-P(X<200)=1-F(200)=e^{-2},$$

$$P(C=18)=P(X\leq 200)=F(200)=1-e^{-2} \text{ e}$$

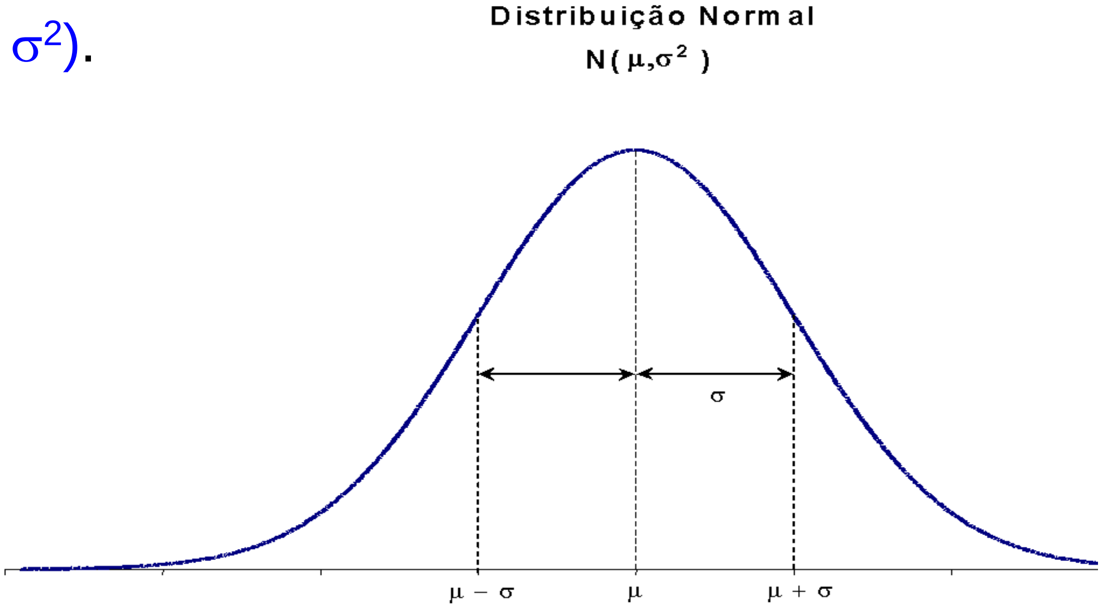
$$E(C)=10\times e^{-2}+18\times(1-e^{-2})=\$16{,}9.$$

5.3. Modelo normal (ou gaussiano)

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 se sua função densidade é dada por

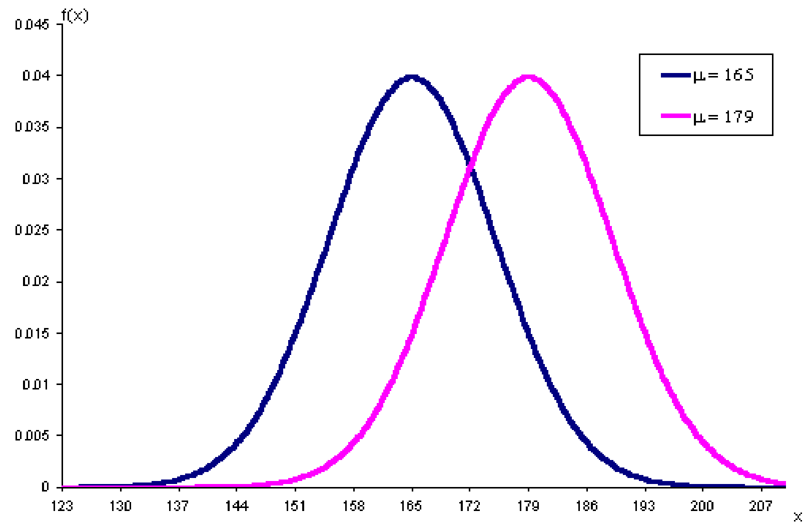
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ x \in R.$$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

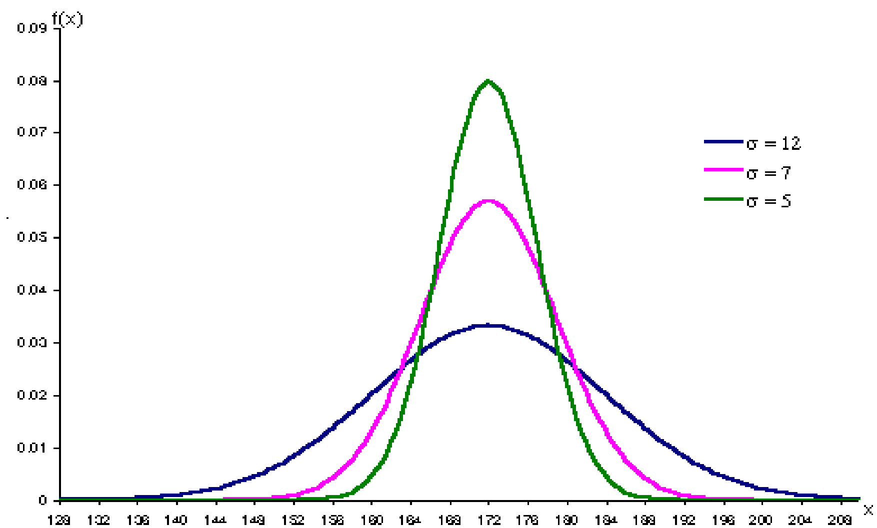


Exemplos

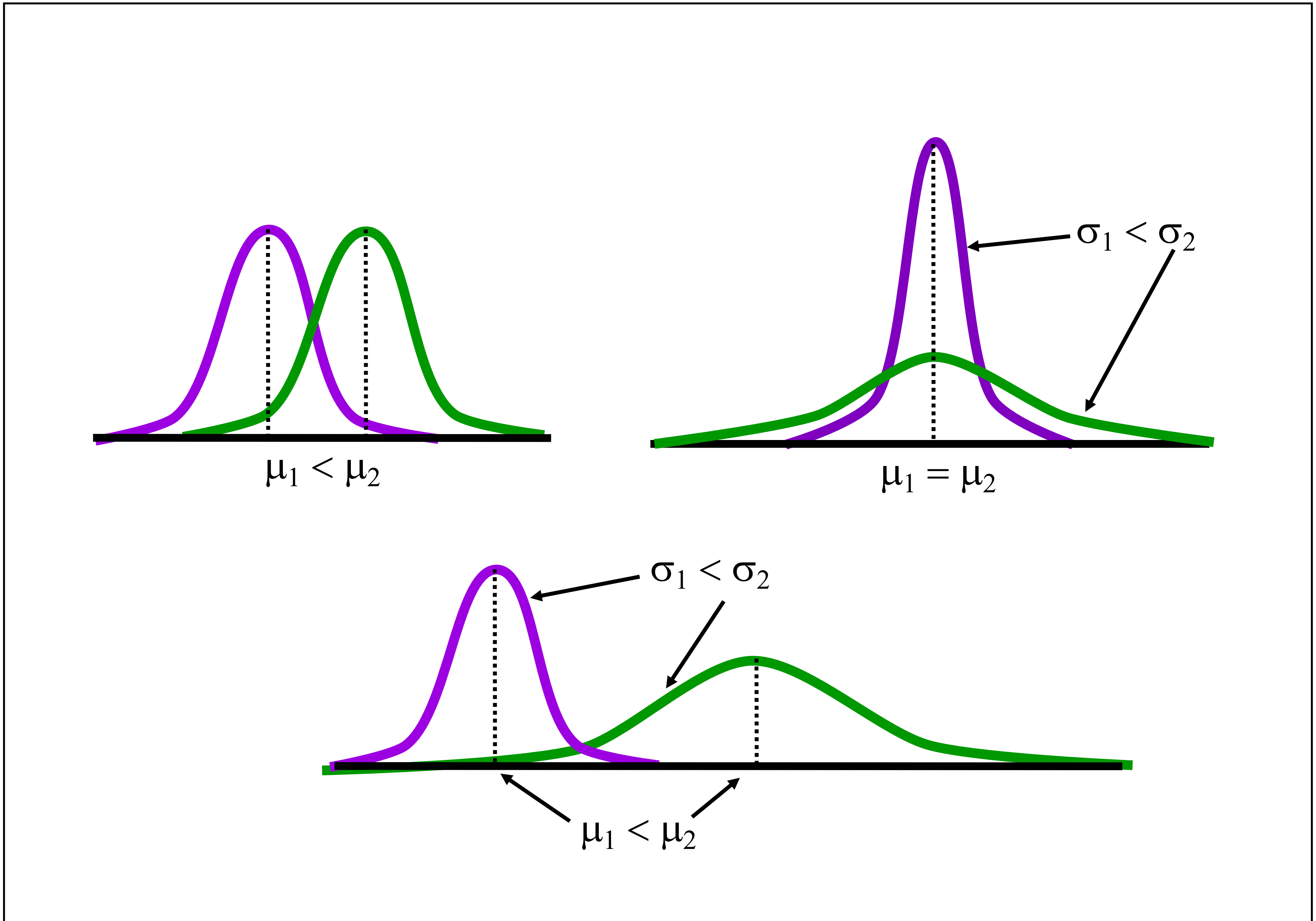
Distribuições normais com médias diferentes e variâncias iguais.



Distribuições normais com médias iguais e variâncias diferentes.



Exemplos



Propriedades

(a) E(X) = μ, Var(X) = σ^2 e mediana = moda = μ.

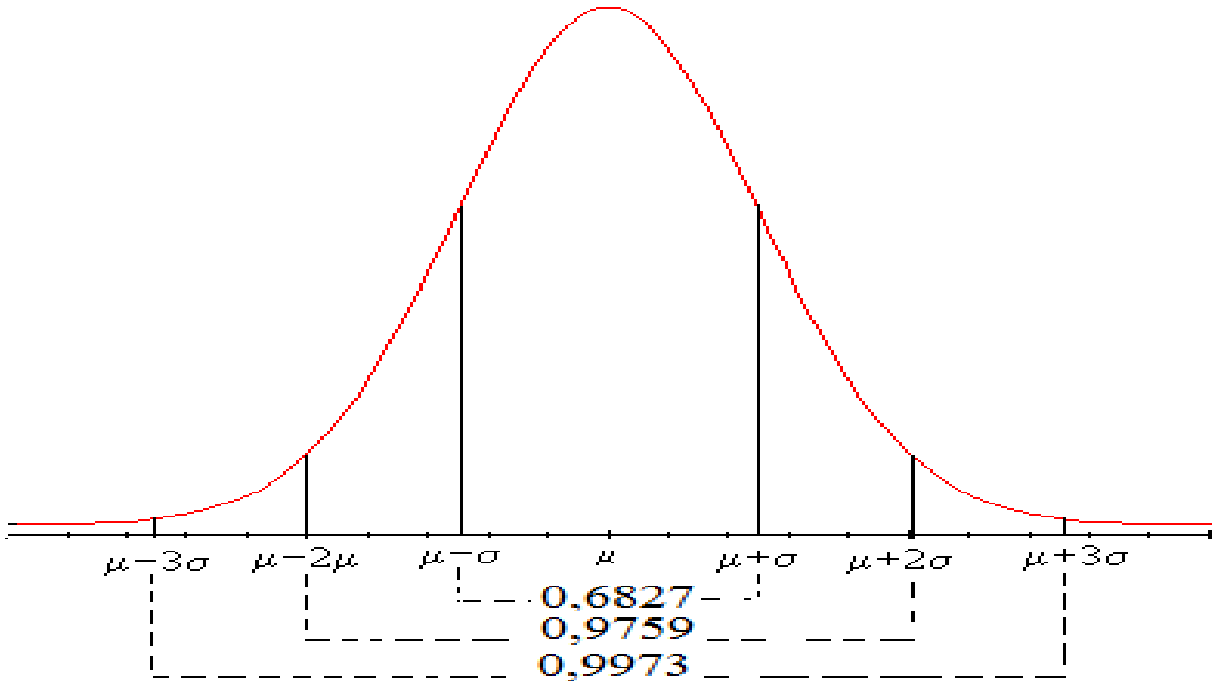
(b) A distribuição é simétrica em relação à média.

(c) Como a área total sob curva é igual a 1, à esquerda e à direita de μ a área é igual a 0,5.

(d) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0{,}6827,$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}9759$ e

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}9973.$



Propriedades

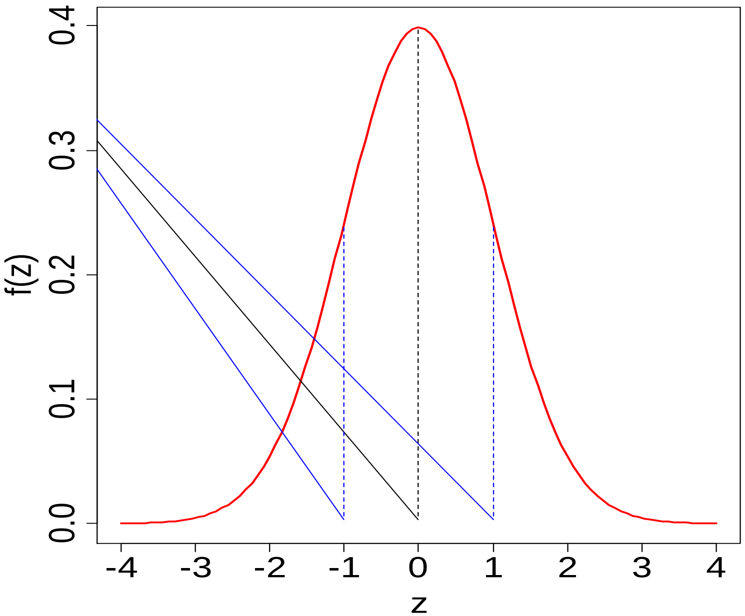
A função de distribuição acumulada de uma v.a. X ~ N(μ, σ²) é

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2 \right\} dt.$$

Integral sem solução analítica. Cálculo de probabilidades com o auxílio de tabelas.

Normal padrão ou reduzida. Se Z é uma v.a. normal com média 0 e variância 1, então Z é chamada de uma v.a. normal padrão ou reduzida e sua função densidade é

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \; z \in R.$$



A função de distribuição acumulada de uma v.a. Z ~ N(0,1) é

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}t^2)dt.$$

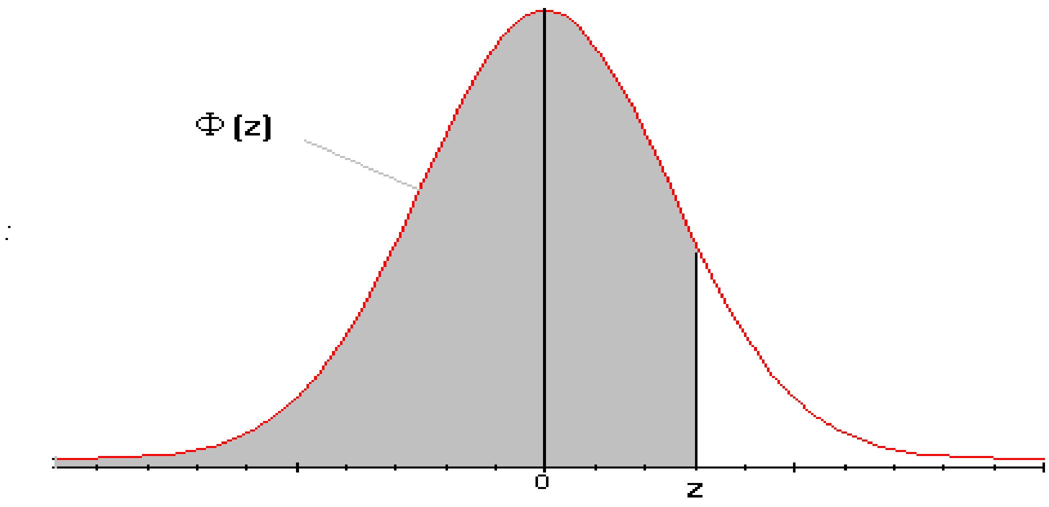
Uso da tabela normal

Table A.3. Areas under the normal curve.

Z ~ N(0,1): distribuição normal padrão.

Valores no corpo da tabela: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, z com duas decimais.

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}t^2)dt, \; -3{,}40 \leq z \leq 3{,}49.$$



Uso da tabela normal

1ª coluna: parte inteira de z e 1ª decimal.

1ª linha: 2ª decimal de z.

Exemplo. P(Z ≤ -1,25) é encontrada na interseção da linha correspondente a –1,2 com a coluna 0,05:

2ª decimal

Parte inteira e 1ª decimal

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4										
...										
-1,2						0,1056				
...										
3,4										

Resposta. P(Z ≤ -1,25) = 0,1056.

Exemplo

Se Z ~ N(0,1), calcule
(a) P(Z < 1,80),
(b) P(0,80 < Z < 1,40),
(c) P(Z > -0,57) e
(d) o valor de k tal que
P(Z < k) = 0,05.

Em R e Excel:

(a) pnorm(1.8) e =DIST.NORMP(1,8).

(b) pnorm(1.4)-pnorm(1.8) e

= DIST.NORMP(1,4) – DIST.NORMP(0,8).

(c) 1-pnorm(-0.57) e =1-DIST.NORMP(-0,57).

(d) qnorm(0.05) e =INV.NORMP(0,05).

Solução. Da tabela normal padrão tem-se

$$(a)\, P(Z < 1{,}80) = \Phi(1{,}80) = 0{,}9641,$$

$$\text{(b) } \mathrm{P}(0{,}80 < \mathrm{Z} < 1{,}40) = \Phi(1{,}40) - \Phi(0{,}80) = 0{,}9192 - 0{,}7881 = 0{,}1311,$$

$$(c)\, P(Z > -0{,}57) = 1 - P(Z \le -0{,}57) = 1 - 0{,}2843 = 0{,}7157,$$

$$(d)\; P(Z < k) = 0{,}05 \Rightarrow k = -1{,}64.$$

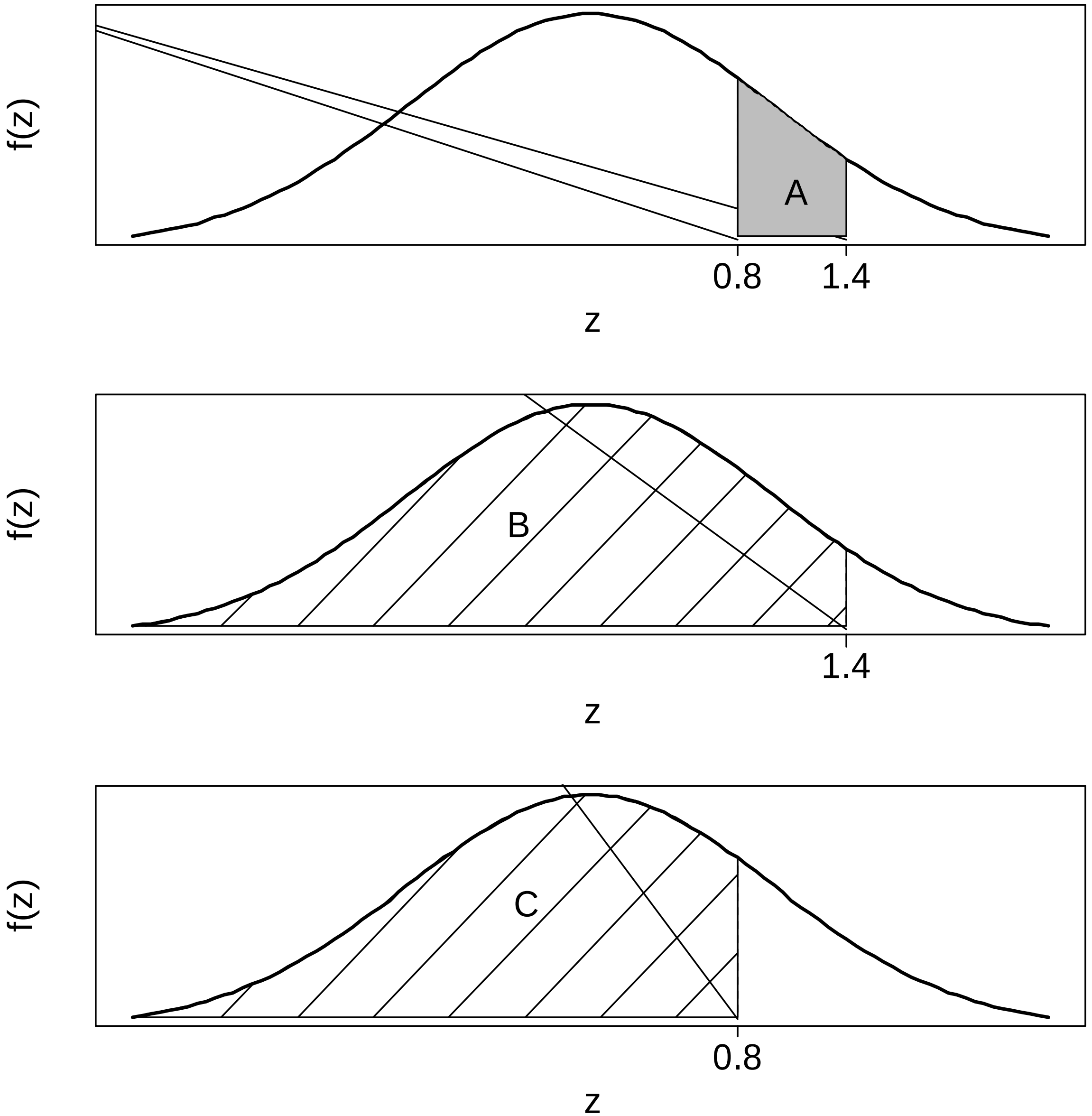
Observação. Para todo k > 0,

$$(i)\, \mathrm{P}(Z \le -k) = 1 - \mathrm{P}(Z \le k) \quad \text{e}$$

$$(ii)\, \mathrm{P}(-k \le Z \le k) = 2\mathrm{P}(Z \le k) - 1 = 1 - 2\mathrm{P}(Z \le -k).$$

Exemplo (b)

A = B – C, sendo que B e C são encontradas na tabela normal.



Transformação linear de uma variável normal

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $Y = a + bX \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, sendo que $\mu_Y = a + b\mu$ e $\sigma_Y^2 = b^2 \sigma^2$.

Tomando $a = - \mu / \sigma$ e $b = 1 / \sigma$ obtemos a padronização

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Distribuição normal padrão ou reduzida.

Exemplo. Se $X \sim N(90,100)$, determinar

(a) $P(80 < X < 100)$,

(b) $P(|X - 90| < 30)$ e

(c) o valor de a tal que $P(90 - 2a < X < 90 + 2a) = 0,99$.

Exemplo

$$(a)\, P(80 < X < 100) = P\left(\frac{80-90}{10} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{100-90}{10}\right) = P(-1{,}00 < Z < 1{,}00)$$

$$= 2P(Z \leq 1{,}00) - 1 = 2 \times 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826.$$

$$(b)\ P(|X-90| < 30) = P(-30 < X - 90 < 30) = P\left(-\frac{30}{10} < \frac{X-90}{10} < \frac{30}{10}\right)$$

$$= P(-3{,}00 < Z < 3{,}00) = 2P(Z < 3{,}00) - 1$$

$$= 2 \times 0{,}9987 \text{ - } 1 = 0{,}9974.$$

$$(c)\, P(90 - 2a < X < 90 + 2a) = P(-2a < X - 90 < 2a) = P\left(-\frac{2a}{10} < \frac{X-90}{10} < \frac{2a}{10}\right)$$

$$= 2P\left(Z \leq \frac{a}{5}\right) - 1 = 0{,}99 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a}{5}\right) = 0{,}995$$

$$\Rightarrow \frac{a}{5} = 2{,}57 \Rightarrow a = 12{,}85.$$

Exemplo

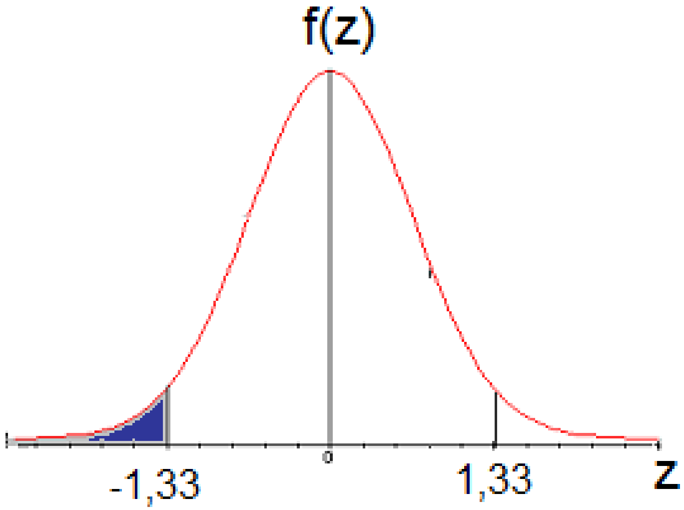
O tempo necessário para produzir um lote de itens tem distribuição normal com média 120 minutos e desvio padrão 15 minutos.

(a) Sorteando-se um lote produzido, qual a probabilidade de que tempo de produção seja inferior a 100 minutos?

Solução. Definimos X como o tempo de produção do lote. Pelo enunciado, X ~ N(120, 15^2). Calculamos

$$P(X < 100) = P\left(Z < \frac{100-120}{15}\right) = P(Z \leq -1{,}33)$$

$$= \Phi(-1{,}33) = 0{,}0918.$$



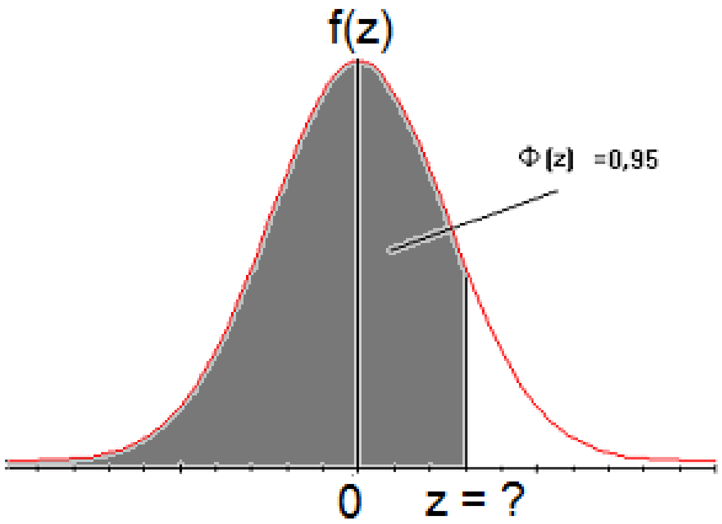
Exemplo

(b) Qual o tempo correspondente à produção de 95% dos itens?

Solução. Devemos encontrar x tal que P(X < x) = 0,95. Após uma transformação,

$$P(X < x) = P\left(Z < \frac{x - 120}{15}\right) = 0{,}95.$$

Iniciamos encontrando z tal que Φ(z)=0,95.



Da tabela normal, z = 1,64. Logo,
x = 120 + 1,64 × 15 = 144,6 min.

Em Excel: =INV.NORMP(0,95)
= z = 1,644853.

=120 + INV.NORMP(0,95) * 15

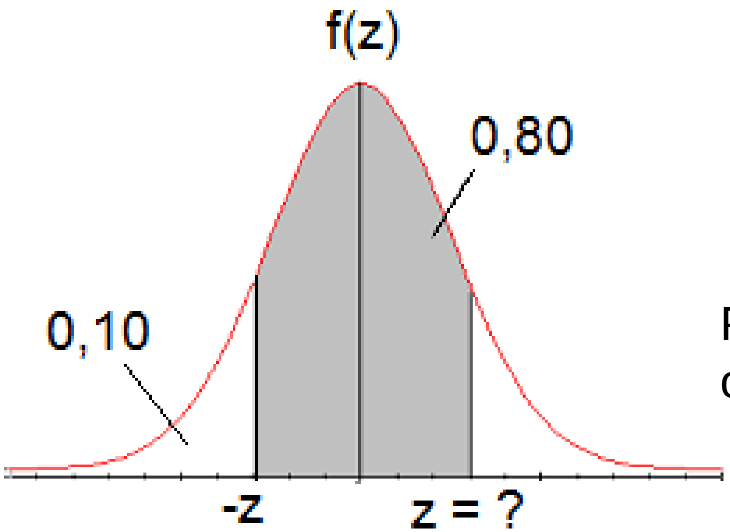
= 144,6728.

Exemplo

(c) Qual o intervalo de tempo central correspondente à produção de 80% dos itens?

Solução. Devemos encontrar x_1 e x_2 tais que

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0,80 \Rightarrow P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \leq Z \leq \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0,80.$$



Probabilidade acumulada até o ponto z é igual a 0,90.

Iniciamos encontrando z tal que $\Phi(z) = 0,90$. Da tabela normal, z = 1,28. Logo,

$$\frac{x_1 - 120}{15} = -1,28 \Rightarrow x_1 = 120 - 15 \times 1,28 \Rightarrow x_1 = 100,8 \text{ min},$$

$$\frac{x_2 - 120}{15} = 1,28 \Rightarrow x_2 = 120 + 15 \times 1,28 \Rightarrow x_2 = 139,2 \text{ min}.$$

A escala sigma

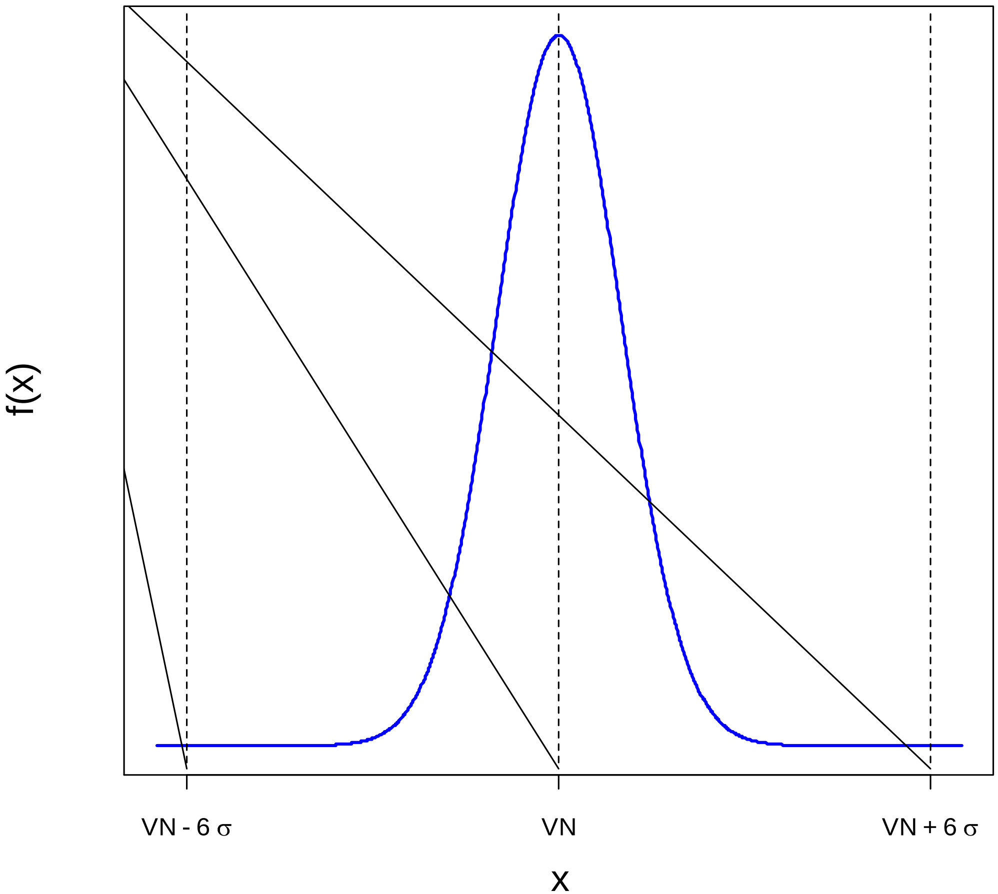
Utilizada para medir o nível de qualidade de um processo de produção.

Quanto maior o número de sigmas (σ), melhor.

X representa uma característica de um item, sendo que $X \sim N(VN, \sigma^2)$.

μ = VN = valor nominal.

Limites de especificação: LIE = VN – 6σ e LSE = VN + 6σ.



$P(X < VN - 6\sigma) + P(X > VN + 6\sigma)$
$= 2\ P(X < VN - 6\sigma)$
$= 2 \times 9{,}865876 \times 10^{-10}$
$= 1{,}973175 \times 10^{-9}$.

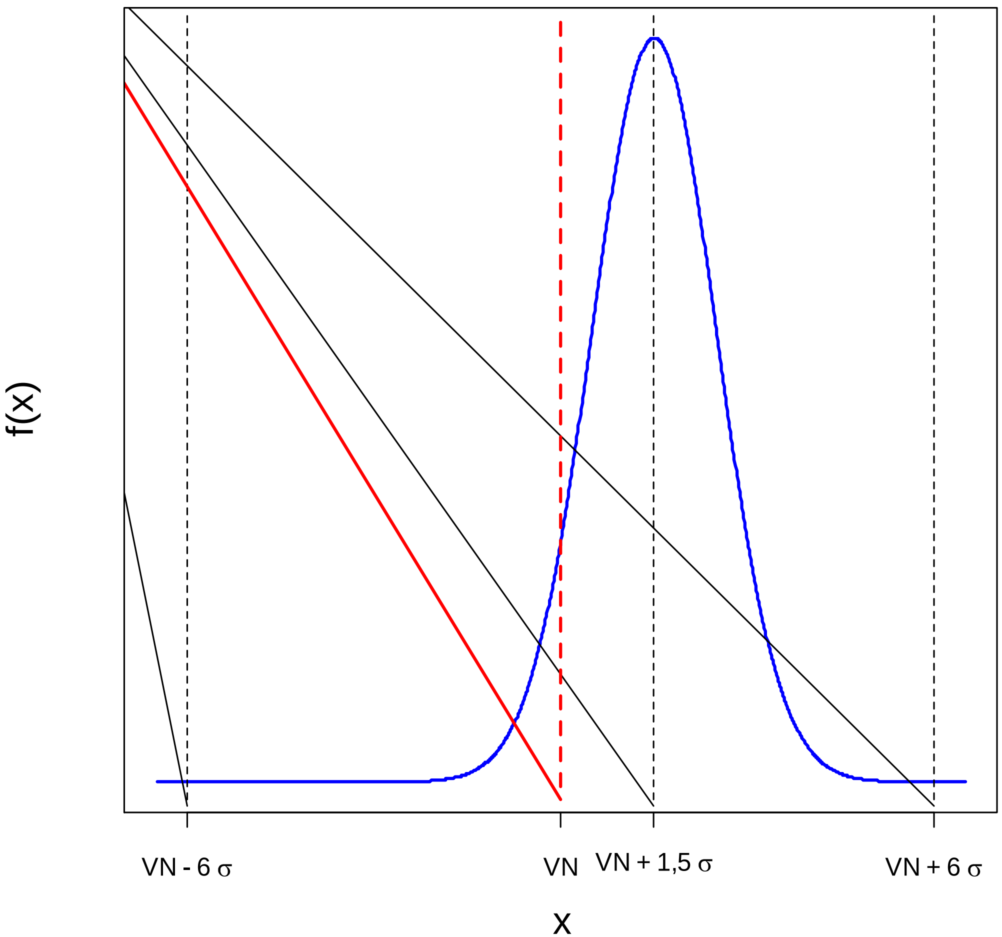
Em Excel: =2*DIST.NORMP(-6)
$= 1{,}98024 \times 10^{-9}$.

Corresponde, em média, a cerca de dois itens que não atendem às especificações a cada bilhão de itens produzidos.

=2*DIST.NORMP(-6)* 1E9 = 1,980.

O processo sofre uma alteração. A média passa a ser μ = VN – 1,5σ ou μ = VN + 1,5σ.

Considere $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, em que μ = VN + 1,5σ.



P(X < VN – 6σ) + P(X > VN + 6σ) = 3,397673 $\times$ 10^{-6}.

Em Excel:
=DIST.NORM(-6;1,5;1; VERDADEIRO)+1– DIST.NORM(6;1,5;1; VERDADEIRO) = 3,4008 $\times$ 10^{-6}.

Corresponde, em média, a cerca de 3,4 itens que não atendem às especificações a cada milhão de itens produzidos.

A escala sigma

Nível	Média de defeitos por milhão
2σ	308537
3σ	66807
4σ	6210
5σ	233
6σ	3,4

4σ	6σ
Sete horas de falta de energia por mês	Uma hora de falta de energia a cada 34 anos
5000 cirurgias incorretas por semana	1,7 cirurgia incorreta por semana
15 minutos de fornecimento de	Um minuto de fornecimento de
água não potável por dia	água não potável a cada sete meses
Fonte: Keene, S. (2000), *Reliability Review* 20, p.19.	

Propriedade

Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a. independentes tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, para i = 1,...,n, então, a v.a.

$$Y = X_1 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

é tal que $Y \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

Padronização:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Exemplo. O peso de uma caixa de peças é uma v.a. normal com média 65 kg e desvio padrão de 4 kg. Um carregamento de 120 caixas de peças é despachado. Qual a probabilidade de que a carga pese entre 7.893 kg e 7.910 kg?

Exemplo

Solução. Pelo enunciado,

X_i : peso da i-ésima caixa $\Rightarrow X_i \sim N(65,16),\ i = 1,\cdots,120.$

Logo,

$$Y : \text{peso da carga} \Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{120} X_i \sim N(120 \times 65, 120 \times 16),$$

$$Y \sim N(7800, 1920).$$

Calculamos

$$P(7893 \le Y \le 7910) = P\left(\frac{7893 - 7800}{\sqrt{1920}} \le Z \le \frac{7910 - 7800}{\sqrt{1920}}\right)$$

$$= P(2{,}12 \le Z \le 2{,}51) = \Phi(2{,}51) - \Phi(2{,}12)$$

$$= 0{,}4940 - 0{,}4830 = 0{,}0110.$$

Teorema central do limite

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição com média μ e desvio padrão σ ($0 < \sigma < \infty$), então a distribuição aproximada de

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma}$$ é normal padrão N(0,1),

sendo que $$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$ é a média amostral.

Observações.

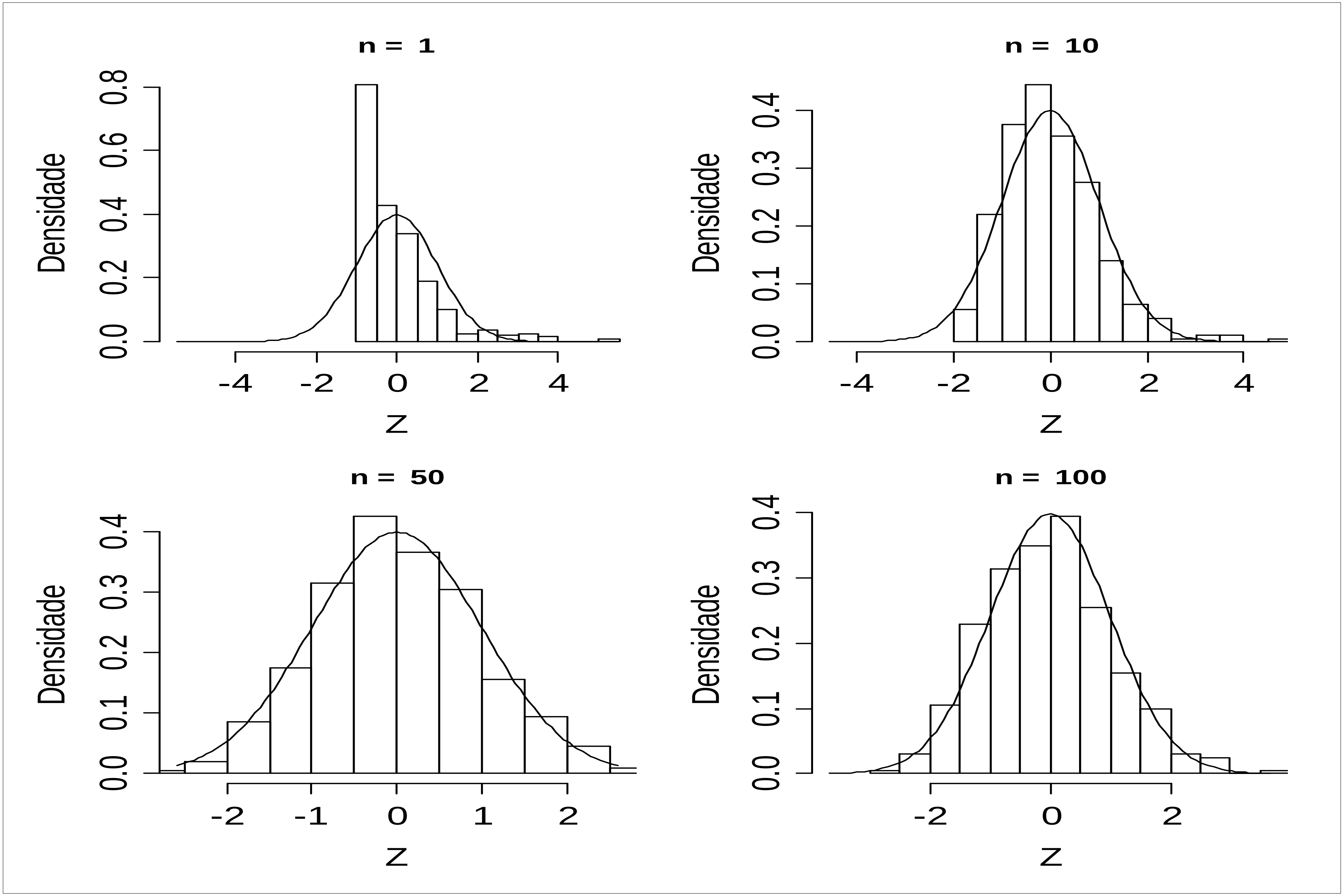
(1) Quanto maior n, melhor a aproximação.

(2) A distribuição das variáveis X pode ser discreta ou contínua.

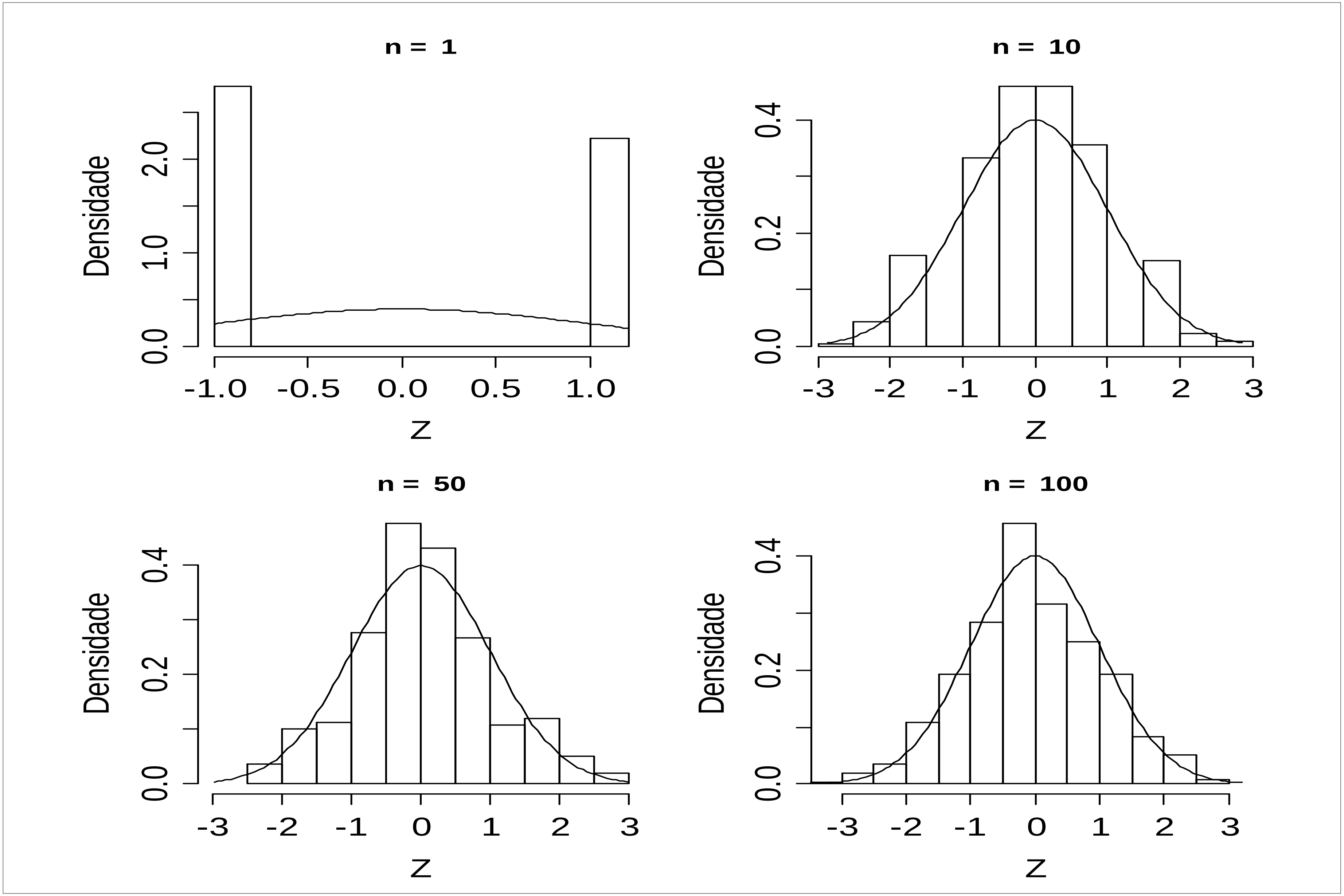
(3) A distribuição aproximada de

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ é } \mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2).$$

Teorema central do limite – Distribuição exponencial



Teorema central do limite – Distribuição Bernoulli (p = 0,45)



Exemplo

Após arredondamento para o inteiro mais próximo, 48 números são somados. Os erros de arredondamento individuais são uniformemente distribuídos no intervalo (-0,5; 0,5). Qual a probabilidade de que a soma dos números arredondados seja diferente da verdadeira soma por mais de 3 unidades (em ambos os sentidos) ?

Solução. Utilizando o teorema central do limite obtemos uma solução aproximada.

X_i, i = 1,...,48 são os erros de arredondamento tais que $X_i \sim U(-0,5; 0,5)$,

$E(X_i) = (-0,5 + 0,5) / 2 = 0$ e $Var(X_i) = [0,5 – (-0,5)]^2 / 12 = 1 / 12$ (veja lâmina 2).

O erro de arredondamento E é dado por $E = X_1 + X_2 + ... + X_{48}$, sendo que a distribuição aproximada é $E \sim N(48 \times 0, 48 \times 1/12) = N(0,4)$.

Devemos calcular $P((E < -3) \cup (E > 3))$, que é igual a $P(E < -3) + P(E > 3)$.

Usando a distribuição aproximada, $P(E < -3) + P(E > 3) = 2 P(E < -3)$

$$= 2P\left(\frac{E - 0}{2} < \frac{-3-0}{2}\right) = 2P(Z < -1,50) = 2 \times 0,0668 = 0,1336.$$

5.4. Modelo de Weibull

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição de Weibull com parâmetros de escala $\alpha > 0$ e forma $\beta > 0$ se sua função densidade é dada por

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}, \quad x \geq 0.$$

Função distribuição acumulada:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}, \quad x \geq 0.$$

Notação: $X \sim W(\alpha, \beta)$.

Obs. Se $\beta = 1$, $X \sim Ex(\alpha)$ (lâmina 5).

Exemplos