Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Obtenção de raízes complexas
Método de Newton-Bairstow

Agosto 2010

Obtenção de raízes complexas

- O método de Newton também pode ser usado para obter raízes complexas, utilizando aritmética complexa.

- Neste caso, veremos um método que obtém raízes complexas usando aritmética real.

- Se P(x) é um polinômio da forma:

$$P(x) = a^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

e os coeficientes são reais, então as raízes complexas aparecem em pares conjugados, como solução de uma equação:

$$x^2 - \alpha x - \beta$$

Quociente e resto:

- Podemos expressar P(x) como:

$$P(x) = (x^2 - \alpha x - \beta) Q(x) + b_1(x - \alpha) + b_0$$

$$Q(x) = b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \ldots + b_2$$

- Obviamente, se determinarmos α e β tais que o resto da divisão do termo por P(x) for exata então, b_0 e b_1 são iguais a zero (os zeros do fator quadrático são raízes de P(x)).
- Vamos determinar quem são os coeficientes de Q(x). Multiplicamos Q(x) pelo termo quadrático e igualamos os coeficientes:

Quociente e resto:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 6x + 8 & x^2 + 2x + 1 \\
\hline
-x^5 - 2x^4 - x^3 & x^3 + x^2 + 2x + 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 6x + 8 \\
\underline{-x^4 - 2x^3 - x^2} \\
2x^3 + 7x^2 + 6x + 8 \\
\underline{-2x^3 - 4x^2 - 2x} \\
3x^2 + 4x + 8 \\
\underline{-3x^2 - 6x - 3} \\
-2x + 5
\end{array}
$$

$$p(x) = (x^2 - \alpha x - \beta)q(x) + b_1(x - \alpha) + b_0$$

p(x)= $(x^2 + 2x + 1)(x^3 + x^2 + 2x + 3) + (-2x + 5)$

Substituindo e igualando os termos de P(x)

$$P(x) = (x^2 - \alpha\, x - \beta)\, Q(x) + b_1(x-\alpha) + b_0$$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2\,(b_n\, x^{n-2} + b_{n-1}\, x^{n-3} + \ldots + b_2) \\ &- \alpha x\,(b_n\, x^{n-2} + b_{n-1}\, x^{n-3} + \ldots + b_2) \\ &- \beta\ \ (b_n\, x^{n-2} + b_{n-1}\, x^{n-3} + \ldots + b_2) \\ &+ b_1(x-\alpha) + b_0 \end{aligned}$$

$$Q(x) = b_n\, x^{n-2} + b_{n-1}\, x^{n-3} + \ldots + b_2$$

Rearrumando:

$$\begin{aligned} &= b_n\, x^n + (b_{n-1} - \alpha\, b_n)\, x^{n-1} + (b_{n-2} - \alpha\, b_{n-1} - \beta\, b_n)\, x^{n-2} \\ &+ \ \ldots + (b_1 - \alpha\, b_2 - \beta\, b_3)\, x + (b_0 - \alpha\, b_1 - \beta\, b_2)\,. \end{aligned}$$

=

$$P(x) = a^n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Termo a termo:

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n \ , \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha \ b_n \ , \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + \alpha \ b_{n-1} + \beta \ b_n \ , \\
&\vdots \\
b_1 &= a_1 + \alpha \ b_2 + \beta \ b_3 \ , \\
b_0 &= a_0 + \alpha \ b_1 + \beta \ b_2 \ .
\end{aligned}
$$

Como anteriormente, fazemos um "esquema prático" para cálculo:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
α		+ αb_n	+ αb_{n-1}	...	+ αb_3	+ αb_2	+ αb_1
β			+ βb_n	...	+ βb_4	+ βb_3	+ βb_2
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_2	b_1	b_0

Sistema não linear

- O que queremos são valores de α e β que façam com que b_0 e b_1 se anulem.

$$\begin{cases} b_1\ (\alpha, \beta) & = & 0 \\ b_0\ (\alpha, \beta) & = & 0 \end{cases}$$

Note que b_0 e b_1 são funções de α e β.

Podemos resolver este sistema através do método de Newton para sistemas não lineares.

Lembrete: método de Newton para sistemas ñ-lineares

$$J(x_k, y_k)\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

No nosso caso:

$$\delta\alpha_0 = \alpha_1 - \alpha_0 \quad \text{e} \quad \delta\beta_0 = \beta_1 - \beta_0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b_1}{\partial \alpha}\,\delta\alpha_0 + \dfrac{\partial b_1}{\partial \beta}\,\delta\beta_0 = -b_1(\alpha_0, \beta_0) \\[2ex] \dfrac{\partial b_0}{\partial \alpha}\,\delta\alpha_0 + \dfrac{\partial b_0}{\partial \beta}\,\delta\beta_0 = -b_0(\alpha_0, \beta_0) \end{cases}$$

Calculando as derivadas parciais (α)

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n \ , \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha\, b_n \ , \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + \alpha\, b_{n-1} + \beta\, b_n \ , \\
&\vdots \\
b_1 &= a_1 + \alpha\, b_2 + \beta\, b_3 \ , \\
b_0 &= a_0 + \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 \ .
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial b_n}{\partial \alpha} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha} = b_n \ ,$$

$$\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha} = b_{n-1} + \alpha \frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha} \ ,$$

$$\frac{\partial b_{n-3}}{\partial \alpha} = b_{n-2} + \alpha \frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha} \ ,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} = b_2 + \alpha \frac{\partial b_2}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial b_3}{\partial \alpha} \ ,$$

$$\frac{\partial b_0}{\partial \alpha} = b_1 + \alpha \frac{\partial b_1}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial b_2}{\partial \alpha} \ .$$

Calculando as derivadas parciais (α)

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n \,, \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha\, b_n \,, \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + \alpha\, b_{n-1} + \beta\, b_n \,, \\
&\vdots \\
b_1 &= a_1 + \alpha\, b_2 + \beta\, b_3 \,, \\
b_0 &= a_0 + \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 \,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b_n}{\partial \alpha} &= 0 \,, \\
\cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha}} &= b_n \,, \\
\cancelto{c_{n-1}}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha}} &= b_{n-1} + \alpha \cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha}} \,,
\end{aligned}
$$

$$
\cancelto{c_{n-2}}{\frac{\partial b_{n-3}}{\partial \alpha}} = b_{n-2} + \alpha \cancelto{c_{n-1}}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha}} + \beta \cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha}} \,,
$$

$$\cdots\cdots$$

$$
\begin{aligned}
\cancelto{c_2}{\frac{\partial b_1}{\partial \alpha}} &= b_2 + \alpha \cancelto{c_3}{\frac{\partial b_2}{\partial \alpha}} + \beta \cancelto{c_4}{\frac{\partial b_3}{\partial \alpha}} \,, \\
\cancelto{c_1}{\frac{\partial b_0}{\partial \alpha}} &= b_1 + \alpha \cancelto{c_2}{\frac{\partial b_1}{\partial \alpha}} + \beta \cancelto{c_3}{\frac{\partial b_2}{\partial \alpha}} \,.
\end{aligned}
$$

Calculando os c_i's

$$
\begin{aligned}
c_n &= b_n \,, \\
c_{n-1} &= b_{n-1} + \alpha c_n \,, \\
c_{n-2} &= b_{n-2} + \alpha c_{n-1} + \beta c_n \,, \\
c_{n-3} &= b_{n-3} + \alpha c_{n-2} + \beta c_{n-1} \,, \\
&\vdots \\
c_2 &= b_2 + \alpha c_3 + \beta c_4 \,, \\
c_1 &= b_1 + \alpha c_2 + \beta c_3 \,.
\end{aligned}
$$

Procedimento prático aplicável

$$\frac{\partial b_n}{\partial \alpha} = 0 \,,$$

$$\cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha}} = b_n \,,$$

$$\cancelto{c_{n-1}}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha}} = b_{n-1} + \alpha \cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha}} \,,$$

$$\cancelto{c_{n-2}}{\frac{\partial b_{n-3}}{\partial \alpha}} = b_{n-2} + \alpha \cancelto{c_{n-1}}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha}} + \beta \cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha}} \,,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cancelto{c_2}{\frac{\partial b_1}{\partial \alpha}} = b_2 + \alpha \cancelto{c_3}{\frac{\partial b_2}{\partial \alpha}} + \beta \cancelto{c_4}{\frac{\partial b_3}{\partial \alpha}} \,,$$

$$\cancelto{c_1}{\frac{\partial b_0}{\partial \alpha}} = b_1 + \alpha \cancelto{c_2}{\frac{\partial b_1}{\partial \alpha}} + \beta \cancelto{c_3}{\frac{\partial b_2}{\partial \alpha}} \,.$$

Procedimento prático:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
α		$+$ αb_n	$+$ αb_{n-1}	...	$+$ αb_3	$+$ αb_2	$+$ αb_1
β			$+$ βb_n	...	$+$ βb_4	$+$ βb_3	$+$ βb_2
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_2	b_1	b_0
α		αc_n	αc_{n-1}	...	αc_3	αc_2	
β			$+$ βc_n	...	$+$ βc_4	$+$ βc_3	
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	...	c_2	c_1	

$$\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} \qquad \frac{\partial b_0}{\partial \alpha}$$

Por que estamos fazendo isso mesmo ?

$$\delta\alpha_0 = \alpha_1 - \alpha_0 \quad \text{e} \quad \delta\beta_0 = \beta_1 - \beta_0$$

c_2

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b_1}{\partial \alpha}\,\delta\alpha_0 + \dfrac{\partial b_1}{\partial \beta}\,\delta\beta_0 = -b_1\left(\alpha_0, \beta_0\right) \\[2ex] \dfrac{\partial b_0}{\partial \alpha}\,\delta\alpha_0 + \dfrac{\partial b_0}{\partial \beta}\,\delta\beta_0 = -b_0\left(\alpha_0, \beta_0\right) \end{cases}$$

c_1

Ainda precisamos calcular as derivadas parciais em relação ao β

Calculando as derivadas parciais (β)

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n \, , \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha \, b_n \, , \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + \alpha \, b_{n-1} + \beta \, b_n \, , \\
&\vdots \\
b_1 &= a_1 + \alpha \, b_2 + \beta \, b_3 \, , \\
b_0 &= a_0 + \alpha \, b_1 + \beta \, b_2 \, .
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial b_n}{\partial \beta} = \frac{\partial b_{n-1}}{\partial \beta} = 0$$

$$\overset{c_n}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \beta}} = bn \, ,$$

$$\overset{c_{n-1}}{\frac{\partial b_{n-3}}{\partial \beta}} = b_{n-1} + \alpha \, \overset{c_n}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \beta}} \, ,$$

$$\overset{c_{n-2}}{\frac{\partial b_{n-4}}{\partial \beta}} = b_{n-2} + \alpha \overset{c_{n-1}}{\frac{\partial b_{n-3}}{\partial \beta}} + \overset{c_n}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \beta}} \, ,$$

$$\overset{c_3}{\frac{\partial b_1}{\partial \beta}} = b_3 + \alpha \overset{c_4}{\frac{\partial b_2}{\partial \beta}} + \beta \overset{c_5}{\frac{\partial b_3}{\partial \beta}} \, ,$$

$$\overset{c_2}{\frac{\partial b_0}{\partial \beta}} = b_2 + \alpha \overset{c_3}{\frac{\partial b_1}{\partial \beta}} + \beta \overset{c_4}{\frac{\partial b_2}{\partial \beta}} \, .$$

Por que estamos fazendo isso mesmo ?

$$\delta\alpha_0 = \alpha_1 - \alpha_0 \quad \text{e} \quad \delta\beta_0 = \beta_1 - \beta_0$$

c_2 c_3

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b_1}{\partial \alpha}\,\delta\alpha_0 + \dfrac{\partial b_1}{\partial \beta}\,\delta\beta_0 = -b_1(\alpha_0, \beta_0) \\[2ex] \dfrac{\partial b_0}{\partial \alpha}\,\delta\alpha_0 + \dfrac{\partial b_0}{\partial \beta}\,\delta\beta_0 = -b_0(\alpha_0, \beta_0) \end{cases}$$

c_1 c_2

$$\begin{cases} c_2\,\delta\alpha_0 + c_3\,\delta\beta_0 = -\,b_1(\alpha_0, \beta_0) \\[1ex] c_1\,\delta\alpha_0 + c_2\,\delta\beta_0 = -\,b_0(\alpha_0, \beta_0) \end{cases}$$

Exemplo

- Calcular duas raízes conjugadas da equação polinomial

$P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 4$

pelo método de Newton-Bairstow, iniciado em
$(\alpha_0, \beta_0) = (1,-1)$

Exemplo (solução)

$P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 4$

		a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
α			$+$	$+$		$+$	$+$	$+$
			$\alpha\, b_n$	$\alpha\, b_{n-1}$		$\alpha\, b_3$	$\alpha\, b_2$	$\alpha\, b_1$
				$+$		$+$	$+$	$+$
				$\beta\, b_n$		$\beta\, b_4$	$\beta\, b_3$	$\beta\, b_2$
β		b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	---	b_2	b_1	b_0
			$+\alpha c_n$	$+\alpha c_{n-1}$		$+\alpha c_3$	$+\alpha c_2$	
				$+\beta\, c_n$		$+\beta c_4$	$+\beta c_3$	
		c_n	c_{n-1}	c_{n-2}		c_2	c_1	

Primeiramente calculamos os b_k e os c_k. Assim:

		1	-2	4	-4	4
	1		1	-1	2	-1
	-1			-1	1	-2
b_k's $\longrightarrow$		1	-1	2	-1	1
	1		1	0	1	
	-1			-1	0	
c_k's $\longrightarrow$		1	0	1	0	
		c_4	c_3	c_2	c_1	

$$\begin{cases} c_2\, \delta\alpha_0 + c_3\, \delta\beta_0 = -\, b_1(\alpha_0, \beta_0) \\ c_1\, \delta\alpha_0 + c_2\, \delta\beta_0 = -\, b_0(\alpha_0, \beta_0) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1.\ \delta\alpha_0 + 0.\ \delta\beta_0 = 1 \\ 0.\ \delta\alpha_0 + 1.\delta\beta_0 = -1 \end{cases}$$

Exemplo (solução)

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
α		$+$ $\alpha\, b_n$	$+$ $\alpha\, b_{n-1}$ $+$ $\beta\, b_n$		$+$ $\alpha\, b_3$ $+$ $\beta\, b_4$	$+$ $\alpha\, b_2$ $+$ $\beta\, b_3$	$+$ $\alpha\, b_1$ $+$ $\beta\, b_2$
β	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	---	b_2	b_1	b_0
		$+\alpha c_n$	$+\alpha c_{n-1}$ $+\beta\, c_n$		$+\alpha c_3$ $+\beta c_4$	$+\alpha c_2$ $+\beta c_3$	
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}		c_2	c_1	

$$\begin{cases} 1.\ \delta\alpha_0 + 0.\ \delta\beta_0 = 1 \\ 0.\ \delta\alpha_0 + 1.\delta\beta_0 = -1 \end{cases}$$

$$\delta\alpha_0 = 1 \ \text{ e } \delta\beta_0 = -1.$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 + \delta\alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 = 2\ , \\ \beta_1 &= \beta_0 + \delta\beta_0 \Rightarrow \beta_1 = -2\ . \end{aligned}$$

Repetindo o processo com os novos α e β:

	1	-2	4	-4	4
2		2	0	4	0
-2			-2	0	-4
	1	0	2	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

α e β acarretam raiz

Exemplo (solução)

Logo, $x^2 - \alpha\ x - \beta\ =\ x^2 - 2\ x + 2$ é um divisor exato de $P(x)$

$\boxed{x = 1 \pm i}$

$\boxed{x = \pm \sqrt{2}i}$

	1	-2	4	-4	4
2		2	0	4	0
-2			-2	0	-4
	1	0	2	0	0

$Q(x) = x^2+2$

α_1 e β_1 acarretam raiz

Exercício (questão da prova sme 100)

Lembremo-nos que o método de Newton–Bairstow procura as raízes complexas de um polinômio $P(x)$ tentando reescrevê-lo como $P(x) = (x^2 - \alpha x - \beta)Q(x)$. Desta forma, as raízes de $x^2 - \alpha x - \beta$ são também raízes de $P(x)$. Uma vez que não é possível, em geral, encontrar α e β diretamente, utilizamos o método de Newton para sistemas a fim de encontrar uma solução de $\begin{pmatrix} b_0(\alpha,\beta) \\ b_1(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, onde b_0 e b_1 são funções de α e β tais que

$$P(x) = (x^2 - \alpha x - \beta)Q(x) + b_1(x - \alpha) + b_0.$$

O método inclui um esquema prático para o cálculo de b_0, b_1 e suas respectivas derivadas parciais com relação a α e β.

Utilize uma iteração do método de Newton–Bairstow para aproximar todas as raízes do polinômio $x^3 - 3x^2 + 3.25x - 2.5$ partindo de $\alpha_0 = 1$ e $\beta_0 = -1$. Mostre que essa iteração foi suficiente para encontrar as raízes exatamente.