7ª Lista de Exercícios - 05/05/2014

Aplicações de séries de potências

1. Deterine os valores de x para os quais a série dada converge:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^{2n}}{(1-x)^n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$

2. Encontre a série de Taylor das seguintes funções em torno dos centros indicados. Para cada caso, determine o raio de convergência e verifique se a soma da série é a função dada.

   (a) $\sqrt{x}$ em $x = 1$. Aproveite este exercício para calcular $\sqrt{84}$ com três casas de precisão.

   (b) $1/x$ em $x = 2$

   (c) $1/(x+2)$ em $x = 0$

   (d) $\ln x$ em $x = 1$

   (e) e^x em $x = a$. Aproveite para verificar que $e^x = e^a \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$.

3. Use expansões conhecidas para obter a série de Maclaurin da função dada:

   (a) $f(x) = \frac{x^3}{(4-x)^2}$. *Dica:* $\frac{1}{(4-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4-x}\right)$

   (b) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+4x}{1-4x}}$.

   (c) $f(x) = \sin^2 5x$. *Dica:* $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

4. Use série de potências para calcular a integral

   (a) $f(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{s}{1-s^4} ds$.

   (b) $I = \displaystyle\int_0^3 4e^{-x^2} dx$.

(c) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$. Calcule com precisão de três casas decimais.

5. Use uma série de Taylor apropriada para calcular os limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3x - \arctan 3x}{2x^3}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - 3x + 4x^3}{x^3}$

6. Encontre a soma da série:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n-1}$

7. Use séries para estimar o valor da integral com um erro menor que 10^{-3}.

   (a) $\displaystyle\int_0^{0,2} \sin x^2 dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{e^{-x} - 1}{x} dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} dx$

8. (a) Use a série binomial para encontrar a série de Maclaurin de $(1 + x^2)^{-1/2}$.

   (b) Use o item (a) para obter a série de Maclaurin de $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.