## 7ª Lista de Exercícios - 05/05/2014

Aplicações de séries de potências

1. Deterine os valores de $x$ para os quais a série dada converge:
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^{2n}}{(1-x)^n}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$

2. Encontre a série de Taylor das seguintes funções em torno dos centros indicados. Para cada caso, determine o raio de convergência e verifique se a soma da série é a função dada.
   (a) $\sqrt{x}$ em $x = 1$. Aproveite este exercício para calcular $\sqrt{84}$ com três casas de precisão.
   (b) $1/x$ em $x = 2$
   (c) $1/(x+2)$ em $x = 0$
   (d) $\ln x$ em $x = 1$
   (e) $e^x$ em $x = a$. Aproveite para verificar que $e^x = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$.

3. Use expansões conhecidas para obter a série de Maclaurin da função dada:
   (a) $f(x) = \frac{x^3}{(4-x)^2}$. *Dica:* $\frac{1}{(4-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4-x}\right)$
   (b) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+4x}{1-4x}}$.
   (c) $f(x) = \sin^2 5x$. *Dica:* $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

4. Use série de potências para calcular a integral
   (a) $f(y) = \int_0^y \frac{s}{1-s^4} ds$.
   (b) $I = \int_0^3 4e^{-x^2} dx$.

(c) $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$. Calcule com precisão de três casas decimais.

5. Use uma série de Taylor apropriada para calcular os limites:

   (a) $\lim_{x \to 0} \frac{3x - \arctan 3x}{2x^3}$

   (b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - 3x + 4x^3}{x^3}$

6. Encontre a soma da série:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n-1}$

7. Use séries para estimar o valor da integral com um erro menor que $10^{-3}$.

   (a) $\int_0^{0,2} \sin x^2 dx$

   (b) $\int_0^{0,2} \frac{e^{-x} - 1}{x} dx$

   (c) $\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} dx$

8. (a) Seja $\alpha$ um número real dado, com $\alpha$ não-natural. Mostre que $y = (1+x)^\alpha$, $-1 < x < 1$, é uma solução do problema

$$(P) \qquad \begin{cases} y' - \frac{\alpha}{1+x} y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   (b) Suponha que $y = g(x)$, $-1 < x < 1$, seja uma solução de (P). Prove que $g(x) = (1+x)^\alpha$ para todo $-1 < x < 1$.

   (c) Mostre que a função

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - (n-1))}{n!} x^n, \quad \text{(série binomial)}$$

   $-1 < x < 1$, é uma solução do problema (P).

(d) Conclua que, para todo $-1 < x < 1$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$$

(e) Use a série binomial para encontrar a série de Maclaurin de $(1+x^2)^{-1/2}$.

(f) Use o item (a) para obter a série de Maclaurin de $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.