Linguagens e Gramáticas

Linguagens Formais
Hierarquia de Chomsky

Já vimos que

Linguagem é um conjunto de *cadeias* de símbolos sobre um alfabeto/vocabulário, V. É um subconjunto específico de V*. Estas cadeias são denominadas *sentenças* da linguagem, e são formadas pela justaposição de elementos individuais, os símbolos da linguagem.

Pode-se representar uma linguagem:

(1) Por meio da descrição do conjunto finito ou infinito de cadeias (Formalismo Descritivo)

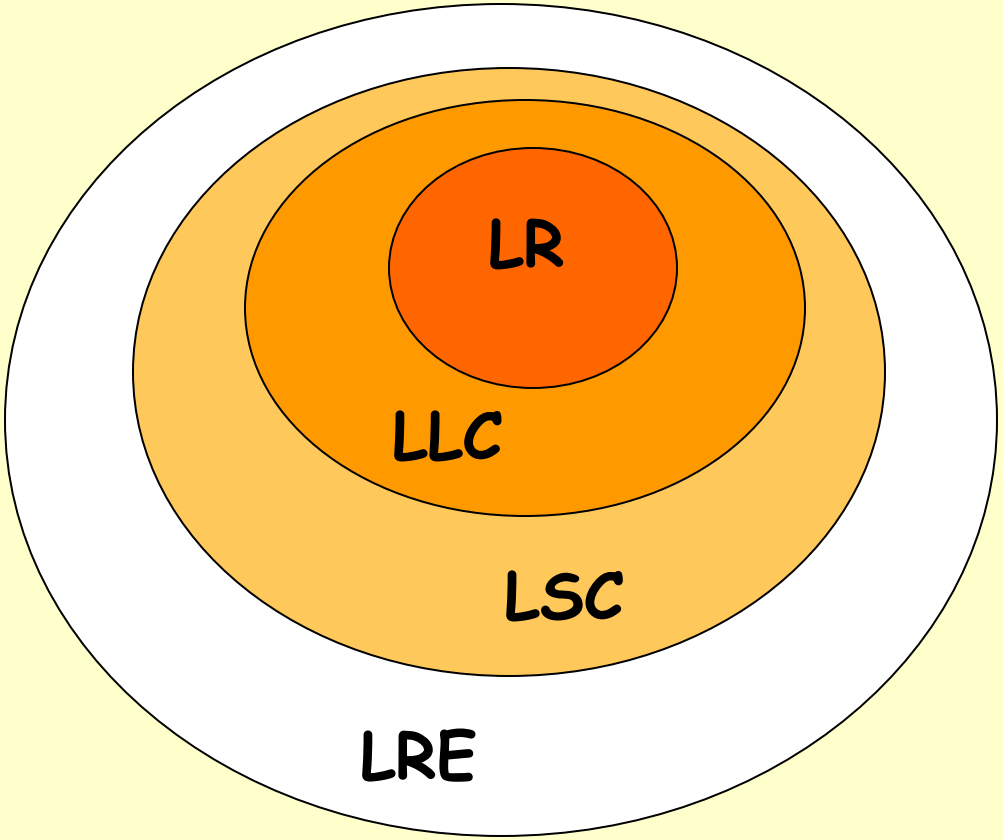
Ex: Linguagem dos números pares; $L=\{ 0^n 1^n \mid n \geq 1\}$

(2) por meio de um Autômato (Formalismo Reconhecedor – Autômato)

Ex: Máquina de Turing

(3) por meio de uma Gramática que a gere
(Formalismo Gerativo)

Hierarquia de Chomsky



LR = Linguagens Regulares

LLC = Linguagens Livres de Contexto

LSL =Linguagens Sensíveis ao Contexto

LRE = Linguagens Recursivamente Enumeráveis

Tipos de Linguagens e Gramáticas

Linguagens	Gramáticas
Rec. Enumerável (LRE)	Estrutura de Frase ou ou Irrestrita ou do Tipo 0 (GEF)
Sensível ao contexto (LSC)	Sensível ao contexto ou do Tipo 1 (GSC)
Livre de contexto (LLC)	Livre de contexto ou do Tipo 2 (GLC)
Regular (LR)	Regular ou do Tipo 3 (GR)

Tipos de Gramáticas

- O tipo mais geral de gramática é conhecido como **tipo 0 ou com Estrutura de Frase ou Irrestritas**

$$\alpha \rightarrow \beta \qquad \alpha \in V^{+};\ \beta \in V^{*}$$

- Não há restrições nas regras de produção, a menos de que a cadeia nula não pode ocorrer do lado esquerdo.

G1 = ({S,A,B,C,D,E}, {a}, P,S)

P = { 1. S-> ACaB
2. Ca -> aaC
3. CB -> DB
4. CB -> E
5. aD -> Da
6. AD -> AC
7. aE -> Ea
8. AE -> λ }

L(G1)=?

- **Menor cadeia: aa**

S =>[1] ACaB =>[2] AaaCB =>[4] AaaE =>[7] AaEa =>[7] AEaa =>[8] aa

- **A e B servem como marcadores da esq e dir para as formas sentenciais.**

- **C é o marcador que se move através da cadeia de a´s entre A e B, dobrando seu número pela produção 2.**

- **Quando C alcança o marcador à direita B, ele se torna um D ou E pela produção 3 ou 4.**

- **Se um D é escolhido, então ele migra à esquerda pela produção 5 até que o marcador à esq, A, seja alcançado.**

- **Nesse ponto, D se torna C de novo pela produção 6 e o processo recomeça.**

- **Se um E é escolhido, o marcador à direita (B) é consumido.**

- **O E migra à esquerda pela produção 7 e consome o marcador à esq pela produção 8.**

$$L(G1) = \{a^{2n} \mid n \text{ é um inteiro positivo}\}$$

Classes Gramaticais

Conforme as restrições impostas ao formato das produções de uma gramática, a classe de linguagens que tal gramática gera varia correspondentemente. A teoria mostra que há quatro classes de gramáticas capazes de gerar quatro classes correspondentes de linguagens, de acordo com a denominada Hierarquia de Chomsky:

Gramáticas com Estrutura de Frase ou Irrestritas ou Tipo 0

Gramáticas Sensíveis ao Contexto ou Tipo 1

Gramáticas Livres de Contexto ou Tipo 2

Gramáticas Regulares ou Tipo 3

Linguagens LRE

As linguagens geradas pelas Gramáticas com Estrutura de Frase ou do Tipo 0 são chamadas de Linguagens Recursivamente Enumeráveis (LRE) ou Linguagens do Tipo 0.

São as linguagens para as quais há uma Máquina de Turing que as reconhece.

Correspondem às funções computáveis.

Gramáticas Sensíveis ao/Dependentes de Contexto ou Tipo 1

Se às regras de substituição for imposta a restrição de que nenhuma substituição possa reduzir o comprimento da forma sentencial à qual a substituição é aplicada, cria-se uma classe de gramáticas ditas sensíveis ao contexto.

As gramáticas que obedecem a estas restrições pertencem, na hierarquia de Chomsky, ao conjunto das Gramáticas Sensíveis ao Contexto (GSC) ou do Tipo 1.

Para as GSC, as produções são todas da forma

$\alpha \rightarrow \beta$, com $|\alpha| <= |\beta|$

onde $\alpha, \beta \in (Vn \cup Vt)^+$

(produções não decrescentes)

Alguns autores colocam as produções de uma GSC como:

$\alpha_1 A \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 \beta \alpha_2$ com $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in V^*$, $\beta <> \lambda$ e $A \in Vn$

para motivar o nome "sensível ao contexto" desde que a produção $\alpha_1 A \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 \beta \alpha_2$ **permite que A seja trocado por β no contexto de α_1 e α_2.**

G2 = ({A,B,C}, {a,b,c},P,A)

P = { A -> abc A -> aBbc
Bb -> bB Bc -> Cbcc
bC -> Cb aC -> aaB
aC -> aa }

$L(G2) = a^n b^n c^n$, $n \geq 1$

Linguagens Sensíveis ao Contexto - LSC

As linguagens geradas pelas Gramáticas Sensíveis ao Contexto ou do Tipo 1 são chamadas de Linguagens Sensíveis ao Contexto (LSC) ou Linguagens do Tipo 1.

Resultado 1:

Toda gramática do tipo 1 é também do tipo 0.

Corolário 1:

Toda LSC é também uma LRE (mas nem toda LRE é LSC).

Gramáticas Livres de Contexto ou Tipo 2

As Gramáticas Livres de Contexto (GLC) ou do Tipo 2 são aquelas cujas regras de produção são da forma:

$A \rightarrow \alpha$ onde $A \in Vn$, $\alpha \in V^+$

Ou seja, quando do lado esquerdo da regra há apenas um símbolo não-terminal

A gramática G3 é uma GLC.

G3 = ({S,A,B}, {a,b}, P,S)

P = {S -> aB | bA

A -> a | aS | bAA

B -> b | bS | aBB }

L(G3) = ?

- Menores cadeias: ab e ba

S => aB => ab

S => bA => ba

S => aB => abS => abbA => abba

=> abaB => abab

=> aaBB => aabb

S => bA => baS => baaB => baab

=> babA => baba

=> bbAA => bbaa

$L(G3) = \{w \in \{a,b\}^+ \mid nro(a) = nro(b)\}$

Todas as combinações de cadeias em V^+ com nro(a) = nro(b)

Linguagens Livres de Contexto (LLC)

As linguagens geradas pelas Gramáticas Livres de Contexto ou do Tipo 2 são chamadas de Linguagens Livres de Contexto (LLC) ou Linguagens do Tipo 2.

Resultado 2:

Toda gramática do tipo 2 é também do tipo 1.

Corolário 2:

Toda LLC é também uma LSC (mas nem toda LSC é uma LLC).

Corolário 2.1:

Toda LLC é também uma LRE (mas nem toda LRE é uma LLC)

BNF

Outra maneira de se representar as Gramáticas Livres de Contexto é através da Forma Normal de Backus.

Neste caso, -> é substituído por ::= e os não terminais são ladeados por < >

No caso de repetições de lado esquerdo:

<A> ::= a1
<A >::= a2
:
<A> ::= an
escreve-se: <A> ::= a1| a2| ...| an

Os símbolos <,> , ::=, | formam a metalinguagem, ou seja, são símbolos que não fazem parte da linguagem mas ajudam a descrevê-la.

Exemplo:

G4 = {Vn, Vt, P, S} onde:

Vn = {<sentença, <sn>, <sv>, <artigo>, <substantivo>, <verbo>}

Vt = {o, a, peixe, comeu, isca}

S = <sentença>

P = {

1. <sentença> ::= <sn> <sv>
2. <sn> ::= <artigo> <substantivo>
3. <sv> ::= <verbo> <sn>
4. <artigo> ::= o|a
5. <verbo> :: = mordeu
6. <substantivo> ::= peixe|isca }

Exercícios:

a) verifique se a cadeia "a isca mordeu o peixe" é uma sentença de L(G4).

b) Dê exemplos de sentenças de L(G4).

Mais GLC:

G5= ({S}, {a, +, *, (,)}, P, S)
P = {
    S -> S * S
    S -> S + S
    S -> (S)
    S -> a }

L(G5)= conjunto das expressões aritméticas envolvendo *, +, ( ) e a.

Um exemplo de cadeia formada por esta gramática é a * (a + a).

Processo inverso: Dada uma L(G) definir a gramática G.

$L(G6) = \{a^m b^n \mid m \geq 1,\ n \geq 1\}$

$L(G6) = \{a^m b^n \mid m \geq 1,\ n \geq 1\}$ ou a^+b^+

Resp.:
G6=({S, A, B}, {a, b}, P, S)
P = {S –> AB
A –> aA | a
B -> bB | b }

Obs.: Caso geral:

Se $A \rightarrow \alpha A \mid \beta$ então $A \Rightarrow \alpha^* \beta$

$L(G7) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

$L(G7) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

$G = (\{S\}, \{a,b\}, P, S)$

$P = \{S \rightarrow aSb \mid ab\}$

Árvores de Derivação Sintática

- Em uma gramática é possível haver várias derivações equivalentes (usam as mesmas produções nos mesmos lugares MAS em ordem diferente).

- Para GLC temos uma representação gráfica que representa uma classe de equivalências chamada Árvore de Derivação. Ela deve ser única para uma sentença.

- Uma árvore de derivação para uma sentença gerada por uma GLC G = (Vn,Vt,P,S) é uma árvore rotulada ordenada em que cada nó é rotulado por um símbolo de $Vn \cup Vt \cup \lambda$.
- Se um nó interno é rotulado com A e seus descendentes diretos são rotulados com $X_1, X_2, ..., X_n$ então

  $A \rightarrow X_1X_2...X_n$ é uma produção de P.

Uma árvore rotulada ordenada D é uma árvore de derivação para uma GLC $G(A) = (Vn,Vt,P,A)$ se

(1) A raiz de D é rotulada com A (o axioma)

(2) Se $D_1, ...D_k$ são as subárvores de descendentes diretos da raiz e a raiz de D_i é rotulada com X_i,
então $A => X_1,...X_k$ é uma produção em P.
Di deve ser a árvore de derivação para $G(X_i) = (Vn,Vt,P,X_i)$ se X_i é não-terminal, e
D_i é um nó simples rotulado com X_i se X_i é terminal.

(3) Se D_1 é a única subárvore da raiz D e a raiz de D_1 é rotulada com λ então $A -> \lambda$ é uma produção de P.

Vértices internos são não-terminais e vértices folhas podem ser não-terminais, terminais ou λ.

Quando fazemos a árvore de derivação de uma sentença, os vértices folhas são sempre terminais ou λ.

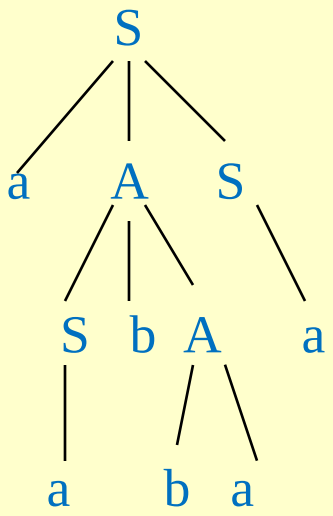
Uma sentença está representada na árvore de derivação fazendo-se a leitura das folhas (nós sem descendentes) da esquerda para direita

Exemplos

- Árvore de derivação para a sentença aabbaa da GLC G = ({S,A},{a,b},P,S)

P: S-> aAS | a

A -> SbA | ba | SS



- Seja Ga = {{E,T,F}, {+,*,(,),a},P,E)

P: E -> E + T | T

T -> T * F | F

F -> (E) | a

1) Seja a sentença a + a *a. Mostre a derivação mais à esquerda e a mais à direita.

- Derivação mais à esquerda (derivar primeiro o não-terminal mais à esquerda):

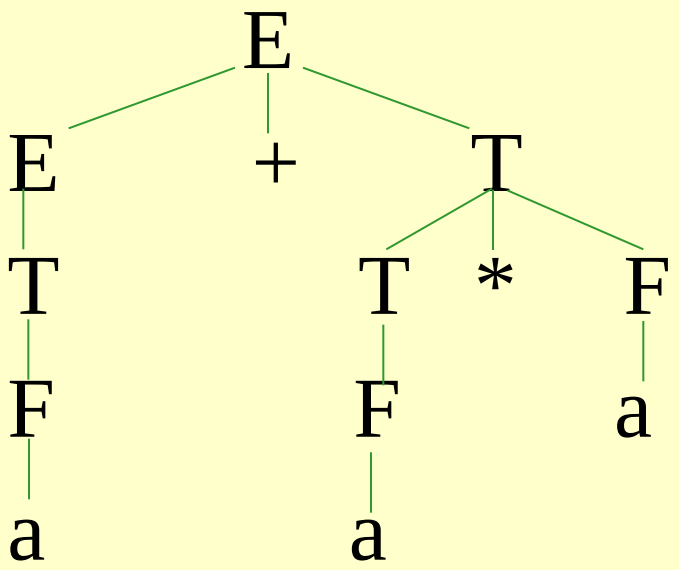
E=>E+T=>T+T=>F+T=>a+T=>a+T*F=>a+F*F=>a+a*F=>a+a*a

- Derivação mais à direita (derivar primeiro o não-terminal mais à direita):

E=>E+T=>E+T*F=>E+T*a=>E+F*a=>E+a*a =>T+a*a=>F+a*a=>a+a*a

2) Agora, mostre a árvore de derivação para

a + a * a

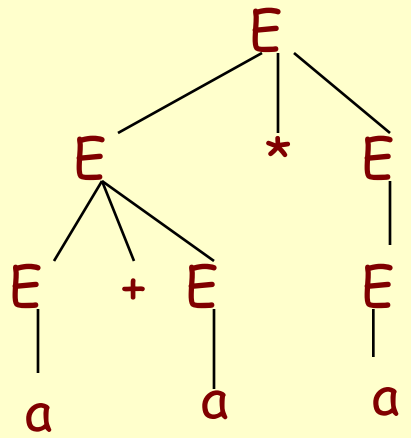


Única Árvore de Derivação

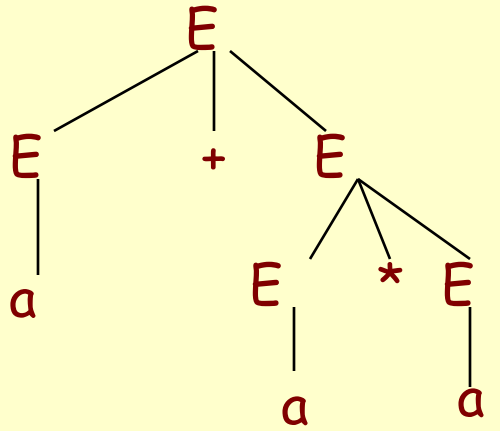
Agora considere a gramática Gb:

E -> E + E |E * E|(E)|a

Não é difícil ver que L(Ga)=L(Gb).
Faça a árvore de derivação mais à esquerda de a+a*a para Gb:



Não é única!!



E=>E*E=>E+E*E=>a+E*E=>a+a*E=>a+a*a

Der. esq.

E=>E+E=>a+E=>a+E*E=>a+a*E=>a+a*a

Der. esq.

➔Gramática Ambígua

De fato:

- Ga indica que o operador * tem precedência sobre o operador +
- Por Gb, ambos operadores têm igual precedência.
- A linguagem de uma gramática ambígua é dita ambígua.
- A ambiguidade decorre do fato de que as árvores de derivação implicam interpretações distintas.

Ambiguidade e Derivações mais à Esquerda

Teorema: Para cada gramática

G=(Vn, Vt, P, S) e cadeias w em Vt*, w tem duas árvores de análise sintática distintas *(logo, G é ambígua)* se e somente se w tem duas derivações mais à esquerda a partir de S.

Ambiguidade nas GLC e as Linguagens de Programação (LP)

- Um requisito importante de uma LP é que ela não seja ambígua.

- O mais famoso caso de ambiguidade é o else pendente, presente na especificação de muitas LP.

- Seja a gramática:

C → if b then C else C
C → if b then C
C → s

Ela é ambígua desde que a cadeia

If b then if b then s else s

Pode ser interpretada como

(i) If b then (if b then s else s)

Ou

(ii) If b then (if b then s) else s

S : outro comando qualquer

A primeira é a preferida nas LP pois utiliza a regra informal "case o else com o if mais próximo", que resolve a ambiguidade

- Para eliminar a ambiguidade da gramática anterior, podemos reescrevê-la com 2 não-terminais C1 e C2:

C1 → if b then C1 | if b then C2 else C1 | s

C2 → if b then C2 else C2 | s

S : outro comando qualquer

O fato de que somente C2 precede o else garante que, entre o par then-else gerado por qualquer uma das produções, deve aparecer ou um s ou outro then-else. Assim, a interpretação (ii) nunca ocorre.

(ii) If b then (if b then s) else s

Obs.: se essa for a interpretação desejada, então, nas LPs, usamos begin-end.

Como mostrar que uma gramática é ambígua?

- Com árvores de derivação.

- Def1: Uma GLC (G) é ambígua se há pelo menos uma cadeia pertencente à L(G) com mais de uma árvore de derivação para representá-la.

- Def2: A existência de uma sentença com duas ou mais derivações mais à esq (ou mais à dir) caracteriza uma linguagem ambígua.

Gramática de Operadores

- Para retirar a ambiguidade de gramáticas de operadores:
  - introduzimos várias variáveis e estratificamos as regras, quando temos operadores com várias prioridades de resolução.
  - Para resolver a ambiguidade vinda do uso de vários operadores idênticos, forçamos o uso da recursão para esquerda ou direita (associatividade).

Regras de Prioridade e Associatividade

- Ajudam na decisão da interpretação correta de expressões nas LP
- Def: Um operador é associativo à esquerda se os operandos são agrupados da esq para dir, e é associativo à direita se os operandos são agrupados da dir para esq.

E → E + T | T

T → T * F | F

F → (E) | a

+ e*: associativos à esquerda

Ex.: a + a + a (1º.; 2º.)

- Está relacionada com a posição da recursão nas regras que permitem um operador ser aplicado mais de uma vez:
- E→ E + T→ E + T + T → T + T + T →...→ a+a+a

- Os níveis de prioridade indicam a quais operadores é permitido agrupar seus operandos primeiro (resolver primeiro).

not

* / div mod and

+ - or

< > <> >= <= =

Quanto mais distante do axioma estiver o operador, maior sua prioridade.

Linguagens Inerentemente ambíguas

É simples encontrar um exemplo de GLC ambígua. Na gramática abaixo para a sentença "a" temos 2 árvores

S → A | B

A → a

B → a

Mas não é tão simples exibir uma LLC inerentemente ambígua

Def ☹: Uma LLC é inerentemente ambígua se não há uma gramática não-ambígua que a gere.

$L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k >= 1 \text{ e } i = j \text{ OU } j = k\}$

S -> abc | aRbI | YbWc

I -> Ic | c

R -> ab | aRb

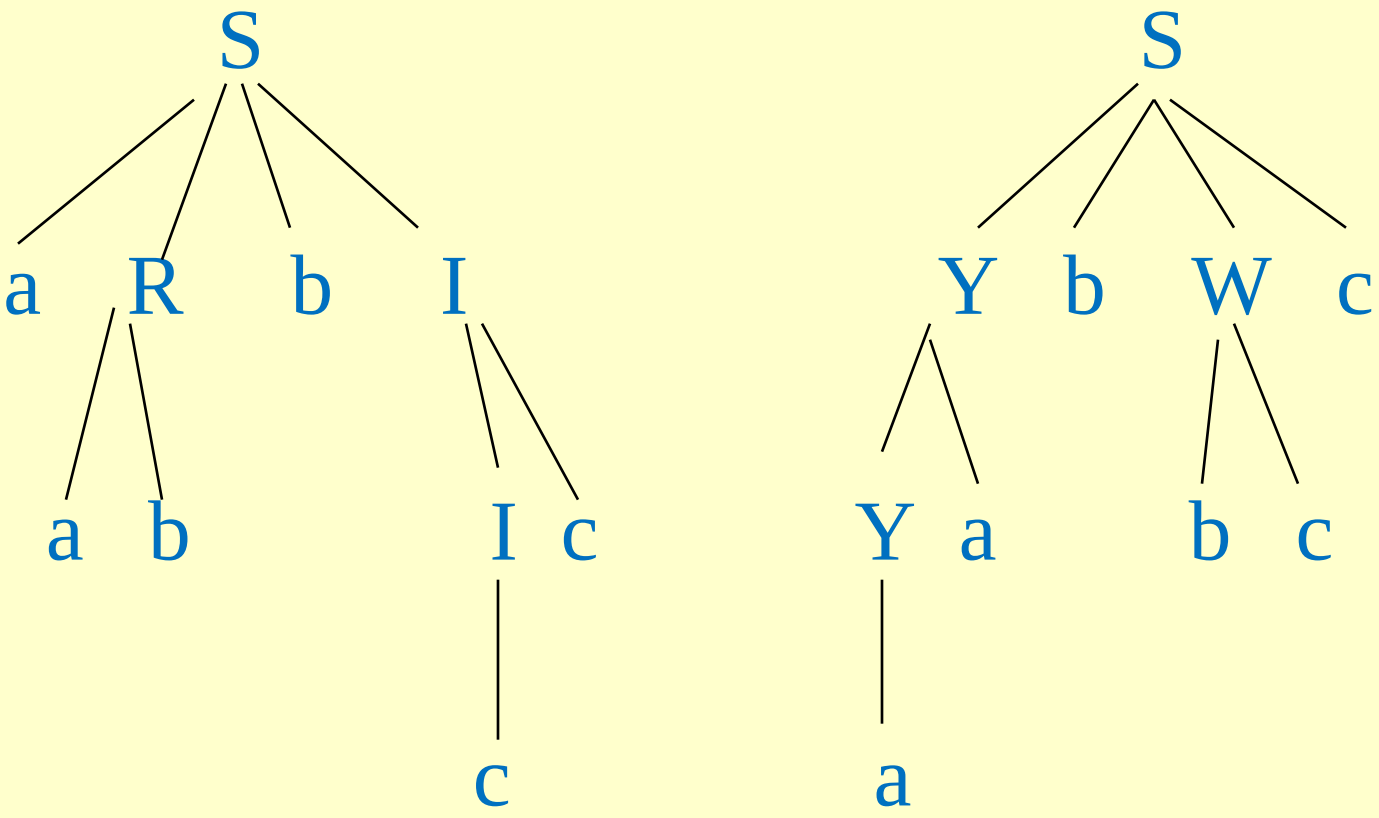
Y -> Ya | a

W -> bc | bWc

O fato de ser inerentemente ambígua decorre de que toda gramática que gera L gera cadeias para i=j por um processo diferente do qual usa para gerar as cadeias para j=k.

É impossível não gerar algumas cadeias para as quais i=j=k por ambos os processos. L é ambígua.

- Exemplo: aabbcc



Propriedades de Gramáticas Ambíguas

Teo ☹: Não existe um algoritmo tal que, dada uma GLC qualquer, retorne a resposta sim, se ela for ambígua, ou não, se ela não for ambígua. (Logo, essa propriedade é indecidível)

MAS

- ☺ em casos particulares, nós podemos reconhecer a ambiguidade e remove-la “à mão”
- ☺ E podemos utilizar classes mais restritas de GLC que, por definição, não são ambíguas (ex. LL(K))

Exemplos de produções ambíguas

1. $A \rightarrow AA$
2. $A \rightarrow A\ \alpha\ A$
3. $A \rightarrow \alpha A \mid A\beta$
4. $A \rightarrow \alpha A \mid \alpha A \beta A$

Quais Gramáticas são ambíguas?

(1) S -> bA | aB

A -> a | aS | bAA

B -> b | bS | aBB

(2) A gramática usada para gerar expressões aritméticas na notação na linguagem APL:

S -> SS + | SS - | SS * | x | y

ou na notação :

S-> +SS | -SS | *SS | x | y

(3) A gramática para gerar parênteses aninhados:

S -> (S) | ( ) | SS

(4) A gramática que define os operadores lógicos and e or

E -> E or E | E and E | (E) | a

Classifique as gramáticas, dê a quádrupla e a L(G) e diga se são finitas/infinitas

1) E -> E + E | E - E | E * E | E / E | (E) | F
   F -> 0 | 1 | ... | 9

2) A -> BC
   BC -> CB
   B -> b
   C -> a

3) A -> 0A | B
   B -> 1B | λ

4) S -> 0A

A -> 1S | 1

5) S -> 0A

A -> 1B

B -> 1S | 1

6) L(G) = {111(00)*}

G = ?

7) L(G) = {$a^n b^n c^*$ | n >= 1 e i >= 0}

G = ?

8) L(G) = {$a^* b^n c^n$ | n >= 1 e i>= 0}

G = ?

9) Utilize o software JFLAP com os exemplos acima