

---

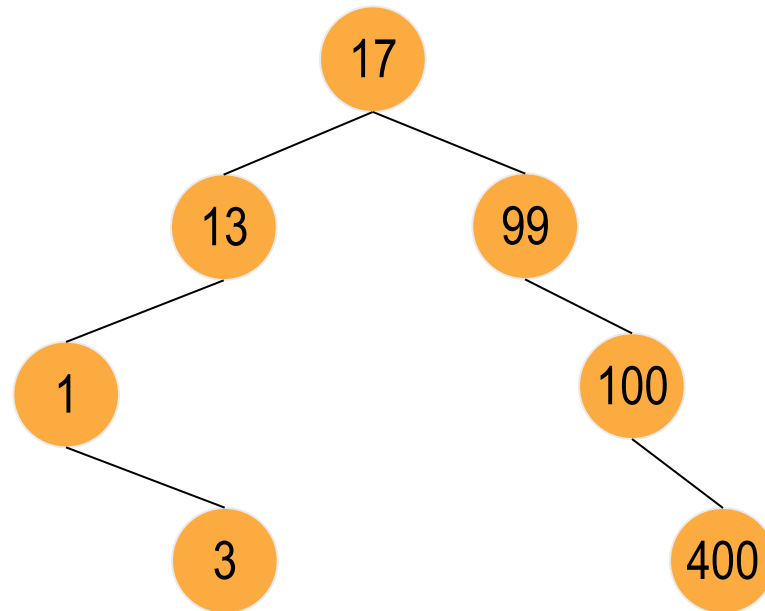
# Árvores Binárias de Busca



# Definição

- Uma Árvore Binária de Busca possui as mesmas propriedades de uma AB, acrescida da seguinte propriedade: Para todo nó da árvore, se seu valor é  $X$ , então:
  - Os nós pertencentes a sua sub-árvore esquerda possuem valores menores do que  $X$ ;
  - Os nós pertencentes a sua sub-árvore direita possuem valores maiores do que  $X$ .
  - Um percurso em in-ordem nessa árvore resulta na seqüência de valores em ordem crescente

# Exemplo



# Características

- Se invertessemos as propriedades descritas na definição anterior, de maneira que a sub-árvore esquerda de um nó contivesse valores maiores e a sub-árvore direita valores menores, o percurso in-ordem resultaria nos valores em ordem decrescente
- Uma árvore de busca criada a partir de um conjunto de valores não é única: o resultado depende da **ordem** de inserção dos dados

# Características

- A grande utilidade da árvore binária de busca é armazenar dados contra os quais outros dados são freqüentemente verificados (busca!)
- Uma árvore binária de busca é armazenada dinamicamente e em geral sofre alterações (inserções e remoções de nós) após ter sido criada

---

# Listas versus ABB

- O **tempo de busca** é estimado pelo número de comparações entre chaves.
- Em listas de  $n$  elementos, temos:
  - Sequenciais (Array):  $O(n)$  se não ordenadas; ou  $O(\log_2 n)$ , se ordenadas
  - Encadeadas (Dinâmicas):  $O(n)$
- As ABB constituem a alternativa que combina as vantagens de ambos: são dinâmicas e permitem a busca binária  $O(\log_2 n)$

---

# Operações em ABB

- Busca
- Inserção – *mantendo as propriedades de ABB*
- Remoção – *mantendo as propriedades de ABB*

# Busca

- Passos do algoritmo de busca:
  - Se a árvore é vazia, fim e não achou. Se chave da raiz é igual à chave procurada, termina busca com sucesso.
  - Senão: Repita o processo para a sub-árvore esquerda, se chave da raiz é maior que a chave procurada; se for menor, repita o processo para a sub-árvore direita.
  - Caso o nó contendo o valor pesquisado seja encontrado, retorne um ponteiro para o nó; caso contrário, se se deparar com uma árvore vazia, retorne um ponteiro nulo.
- Faça a analogia com a busca binária feita em arrays.



# Verifique em que condições a busca em ABB tem performance $O(\log_2 n)$

## ■ Considere:

- uma comparação por nível;
- $n$  nós no total

## ■ Portanto:

- Quanto menor a altura da árvore, menor o número de comparações;
- Altura mínima de uma AB de  $n$  nós é  $O(\log_2 n)$
- AB perfeitamente balanceadas (PB) têm altura mínima.

■ Logo: ABB ideais são PB (e deveriam ser mantidas como tal, porém são dinâmicas.....) 9/30

# Busca (recursiva)

```
pno busca(tree raiz, tipo_elem valor){  
  
    if (raiz == NULL)  
        return NULL;  
  
    if (valor == raiz->info)  
        return raiz;  
  
    if (valor < raiz->info)  
        return busca(raiz->esq, valor);  
    else  
        return busca(raiz->dir, valor);  
  
}
```

# Busca (não recursiva)

```
pno busca(tree raiz, tipo_elem valor) {
    pno p;

    p = raiz;

    while (p != NULL) {
        if (p->info == valor) return p;
        else
            if (valor > p->info) p = p->dir;
            else p = p->esq;
    }

    return p;
}
```

---

# Recursiva versus Não-Recursiva

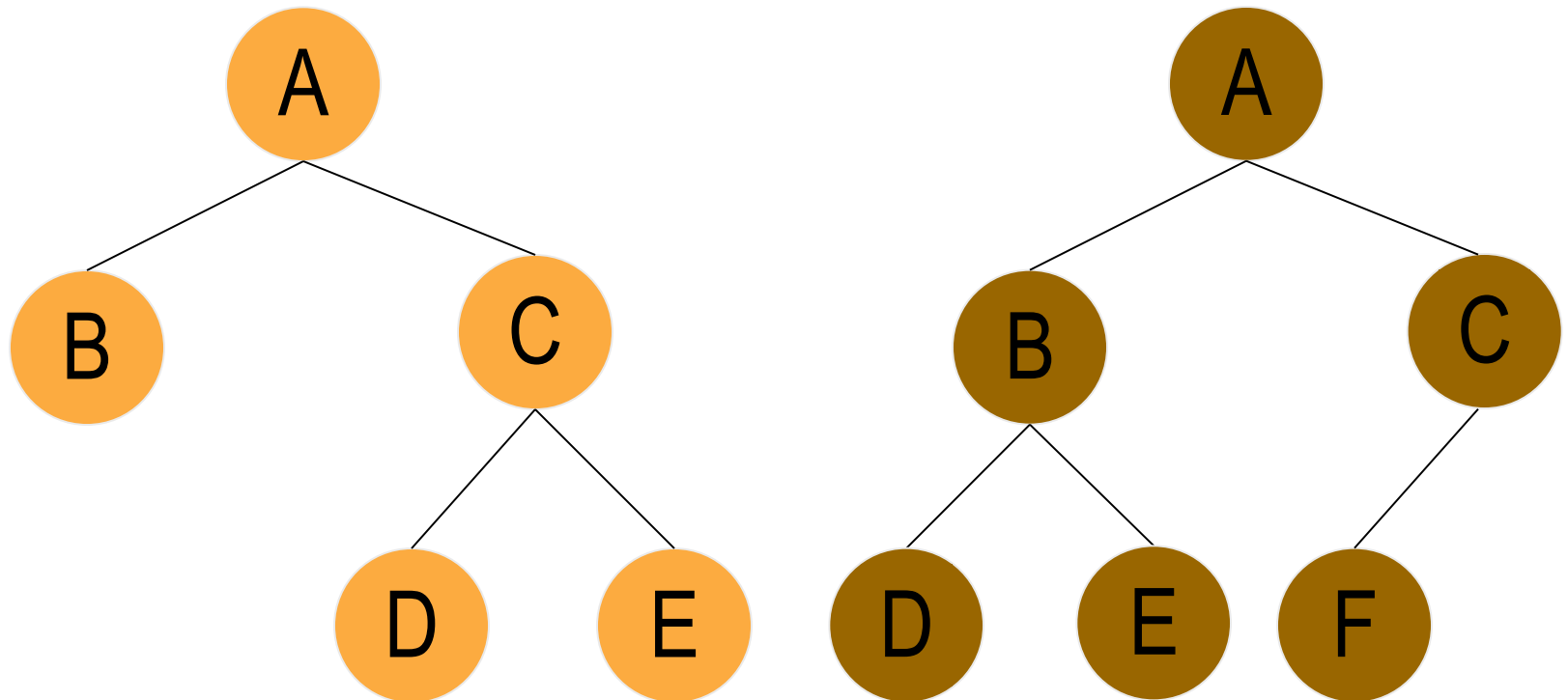
- Em relação a **tempo** (número de comparações): **equivalentes**
- Em relação a **espaço** (memória): a recursiva requer espaço **extra** para as chamadas recursivas. Esse espaço extra é diretamente proporcional (linear) à altura da árvore. **(VERIFIQUE!)**

# Custo da busca em ABB

- **Pior caso:** como o número de passos é determinado pela altura da árvore, o pior caso é a árvore degenerada (altura =  $n$ ).
- Altura da ABB depende da sequência de inserção das chaves...
  - Considere, p.ex., o que acontece se uma sequência ordenada de chaves é inserida...
  - Seria possível gerar uma árvore balanceada com essa mesma sequência, se ela fosse conhecida a priori. Como?
- **Busca ótima:** árvore de altura mínima (perfeitamente balanceada)
- **Busca eficiente:** árvore razoavelmente balanceada... (árvore balanceada)

# Árvore Binária Balanceada

- Para cada nó, as alturas de suas duas subárvores diferem de, no máximo, 1



---

# Árvore Binária Perfeitamente Balanceada

- O número de nós de suas sub-árvores esquerda e direita difere em, no máximo, 1.
- É a árvore de altura mínima para o conjunto de chaves.
- Repare que todo nó de uma árvore PB é mediana de suas subárvores.
- Toda AB Perfeitamente Balanceada é Balanceada, sendo que o inverso não é necessariamente verdade.

# Inserção (operações em ABB's)

- Passos do **algoritmo de inserção**:
  - Procure um “local” para inserir a nova chave, começando a procura a partir do nó-raiz:
  - Para cada nó-raiz, compare:
    - se a nova chave for menor do que o valor no nó-raiz, repita o processo para sub-árvore esquerda; ou
    - se a nova chave for maior que o valor no nó-raiz, repita o processo para sub-árvore direita.
  - Se um ponteiro (filho esquerdo/direito de um nó-raiz) nulo é atingido, coloque o novo nó como sendo raiz dessa sub-árvore vazia.
  - **A inserção sempre se dá como nó folha: não exige deslocamentos!**



---

# Inserção

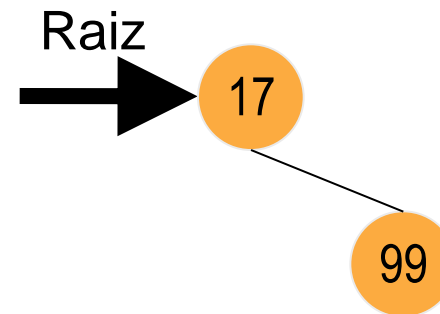
- Para entender o algoritmo, considere a inserção do conjunto de números, na seqüência

{17, 99, 13, 1, 3, 100, 400}

- No início, a ABB está vazia!

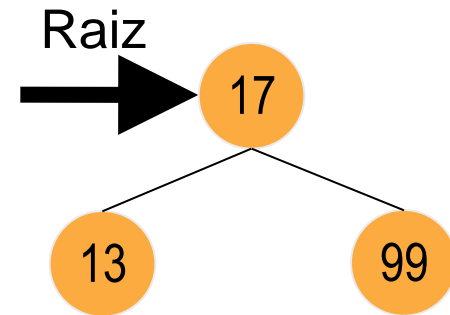
# Inserção

- O número 17 será inserido tornando-se o nó raiz
- A inserção do 99 inicia-se na raiz. Compara-se 99 c/ 17.
- Como  $99 > 17$ , 99 deve ser colocado na sub-árvore direita do nó contendo 17 (sub-árvore direita, inicialmente, nula)



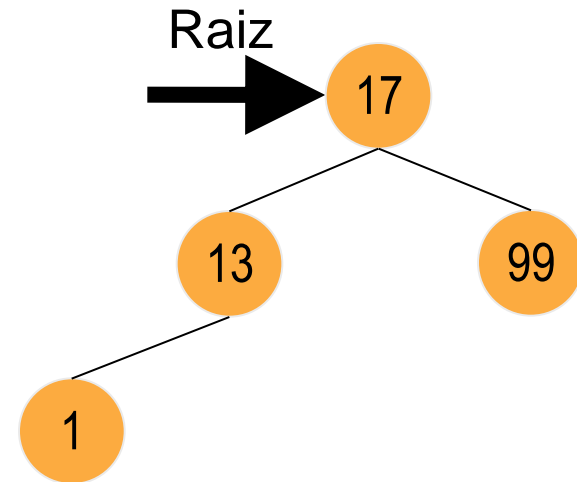
# Inserção

- A inserção do 13 inicia-se na raiz
- Compara-se 13 c/ 17. Como  $13 < 17$ , 13 deve ser colocado na sub-árvore esquerda do nó contendo 17
- Já que o nó 17 não possui descendente esquerdo, 13 é inserido como raiz dessa sub-árvore



# Inserção

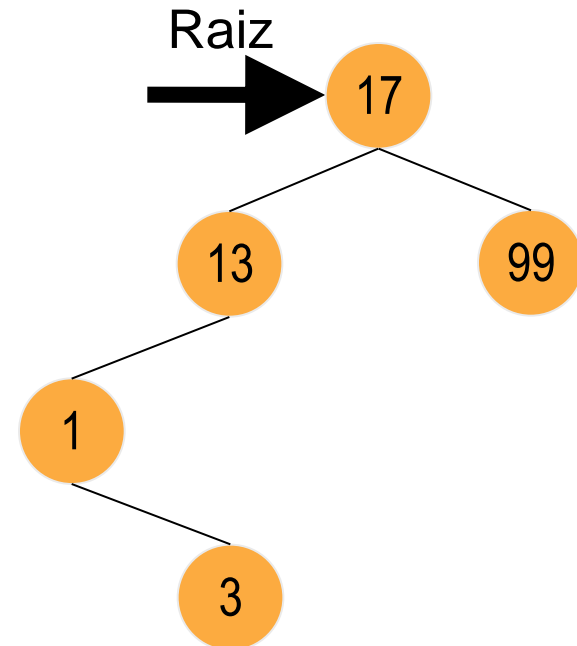
- Repete-se o procedimento para inserir o valor 1
- $1 < 17$ , então será inserido na sub-árvore esquerda
- Chegando nela, encontra-se o nó 13,  $1 < 13$  então ele será inserido na sub-árvore esquerda de 13



# Inserção

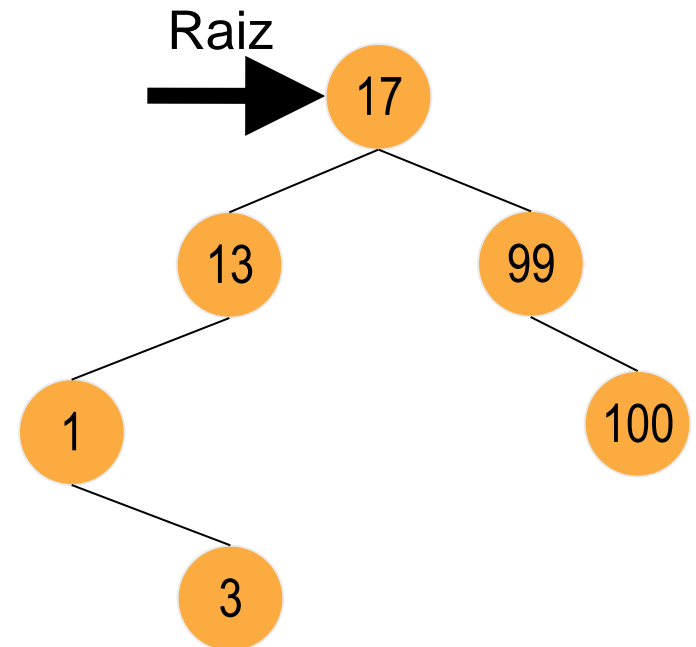
- Repete-se o procedimento para inserir o elemento 3:

- $3 < 17$ ;
- $3 < 13$
- $3 > 1$



# Inserção

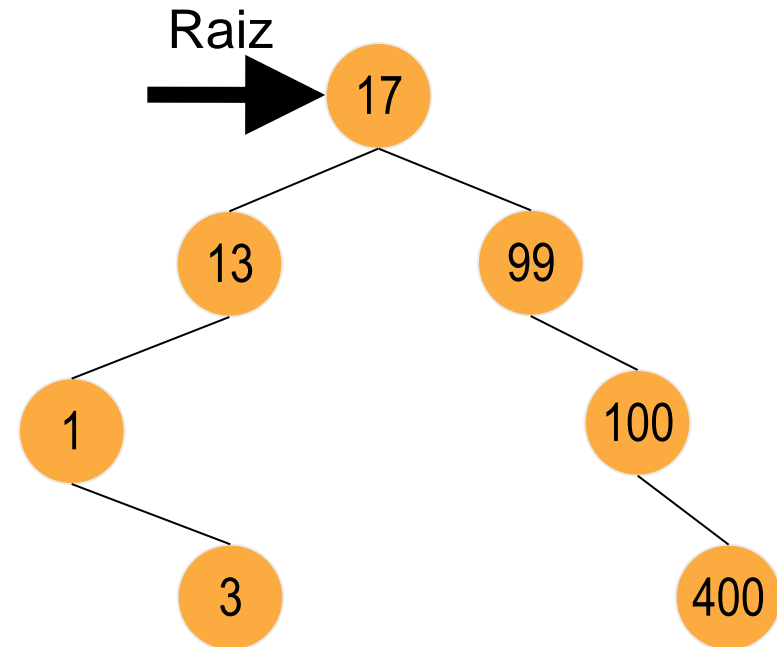
- Repete-se o procedimento para inserir o elemento 100:
  - $100 > 17$
  - $100 > 99$



# Inserção

- Repete-se o procedimento para inserir o elemento 400:

- $400 > 17$
- $400 > 99$
- $400 > 100$



---

# Inserção

- O algoritmo de inserção não garante que a árvore resultante seja perfeitamente balanceada ou mesmo apenas balanceada.
  - A árvore do exemplo anterior não é PB nem balanceada.
-



# Função Recursiva de Inserção

- Seja uma função recursiva que insere uma chave  $x$  numa ABB, se ela já não estiver lá. Retorna o ponteiro para o nó que contém  $x$ .
- Essa função é usada para a construção de uma ABB.

```
pno busca_insere(tipo_elem x, tree raiz);
```

*x*: chave para inserir; *raiz*: raiz da árvore onde deve inserir;  
*busca\_insere*: retorna endereço onde está  $x$

```
pno busca_insere(tipo_elem x, tree *raiz){

    if (raiz == NULL) { /*inserir x como raiz da árvore*/
        raiz = (pno)malloc(sizeof(struct no));
        raiz->info = x;
        raiz->esq = NULL;
        raiz->dir = NULL;
        return raiz;
    }

    if (x < raiz->info)
        return busca_insere(x, &raiz->esq);

    if (x > raiz->info)
        return busca_insere(x, &raiz->dir);

    return raiz;

}
```

---

Acrescente um parâmetro booleano para indicar se houve a inserção ou não.

---

# Custo da Operação de Inserção

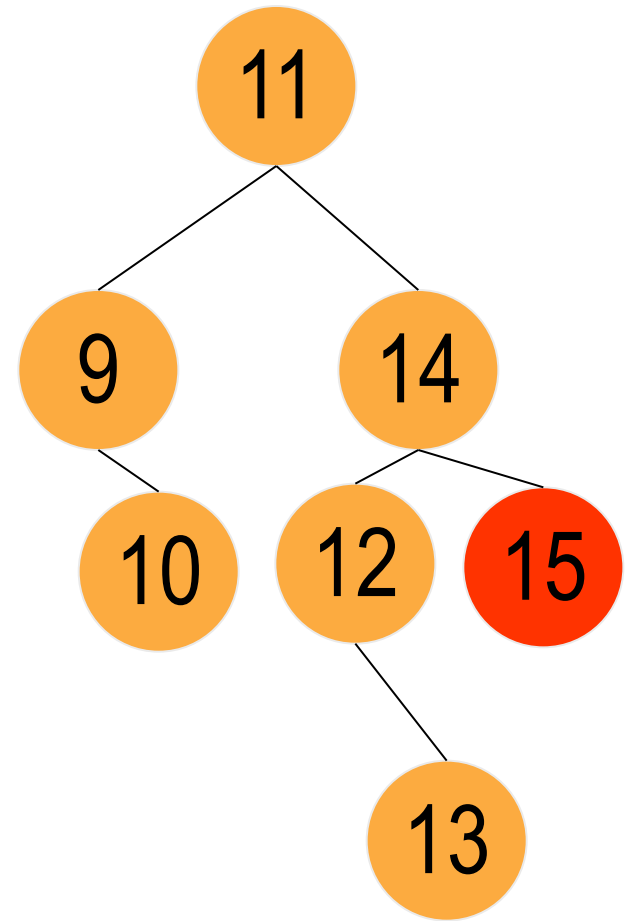
- A inserção requer uma busca pelo lugar da chave, portanto, com custo de uma busca qualquer (tempo proporcional à altura da árvore).
  - O custo da inserção, após a localização do lugar, é constante; não depende do número de nós.
  - Logo, tem complexidade análoga à da busca.
-

# Remoção (operações em ABB's)

- Casos a serem considerados no algoritmo de remoção de nós de uma ABB:
  - **Caso 1:** o nó é folha
    - O nó pode ser retirado sem problema;
  - **Caso 2:** o nó possui uma sub-árvore (esq./dir.)
    - O nó-raiz da sub-árvore (esq./dir.) pode substituir o nó eliminado;
  - **Caso 3:** o nó possui duas sub-árvores
    - O nó cuja chave seja a menor da sub-árvore direita pode substituir o nó eliminado; ou, alternativamente, o de maior valor da sub-árvore esquerda pode substituí-lo.

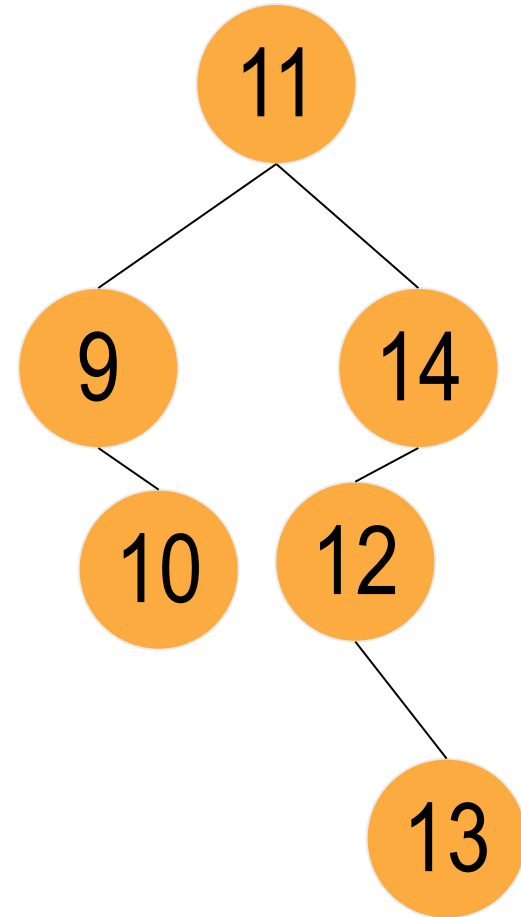
# Remoção – Caso 1

- Caso o valor a ser removido seja o 15
- pode ser removido sem problema, não requer ajustes posteriores



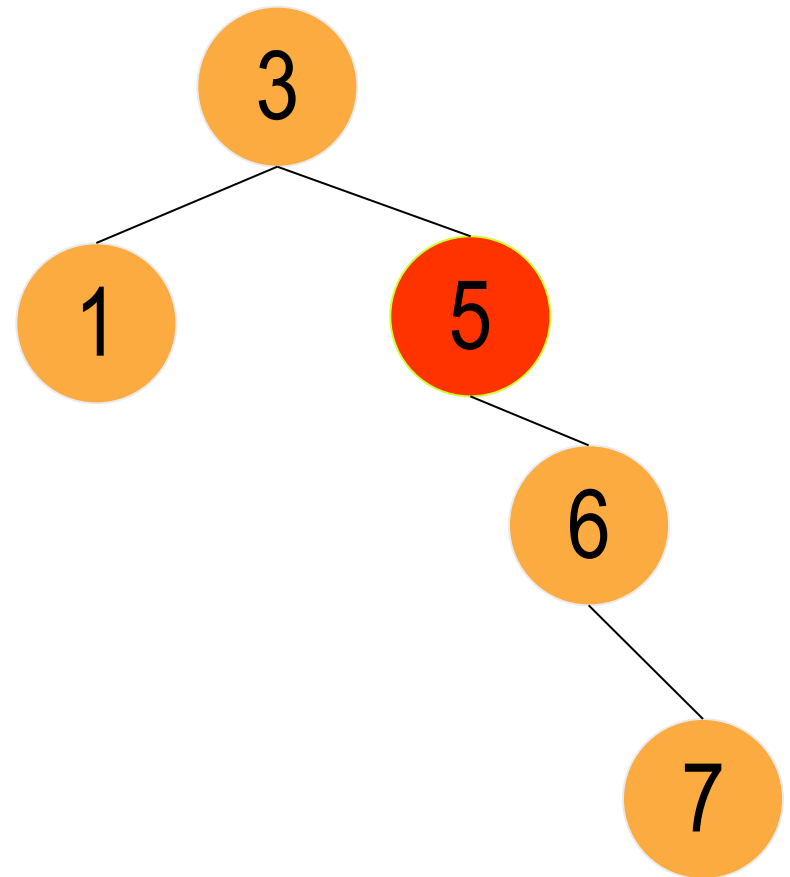
# Remoção – Caso 1

- Os nós com os valores 10 e 13 também podem ser removidos!



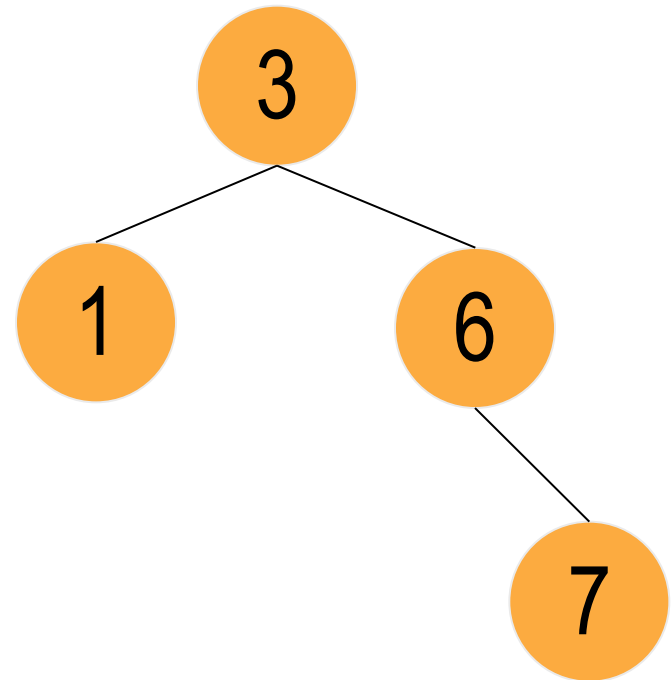
## Remoção – Caso 2

- Removendo-se o nó com o valor 5
- Como ele possui apenas uma sub-árvore direita, seu nó filho, contendo o valor 6, pode “ocupar” o lugar do nó removido



# Remoção – Caso 2

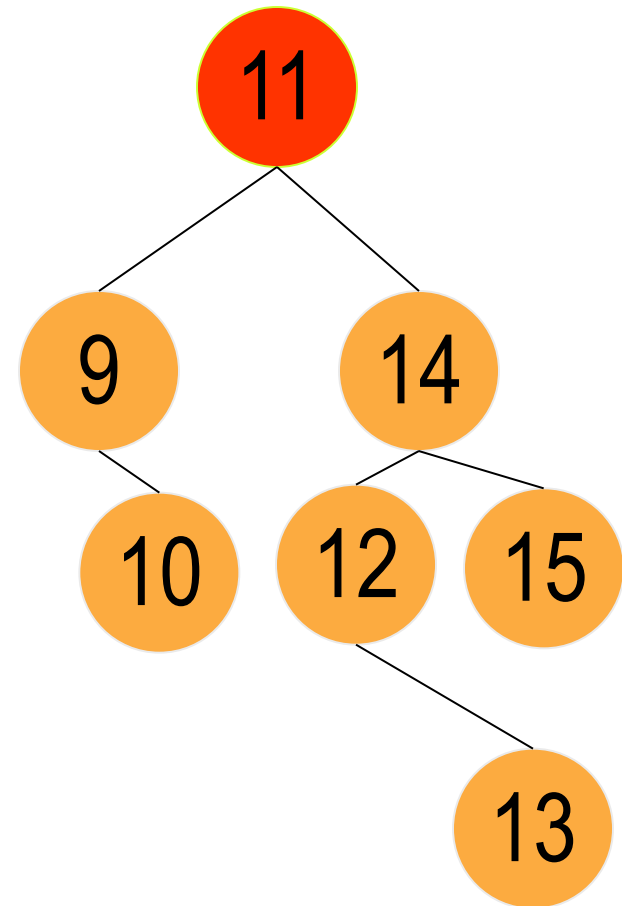
- Caso existisse um nó com somente uma sub-árvore esquerda, seria análogo.





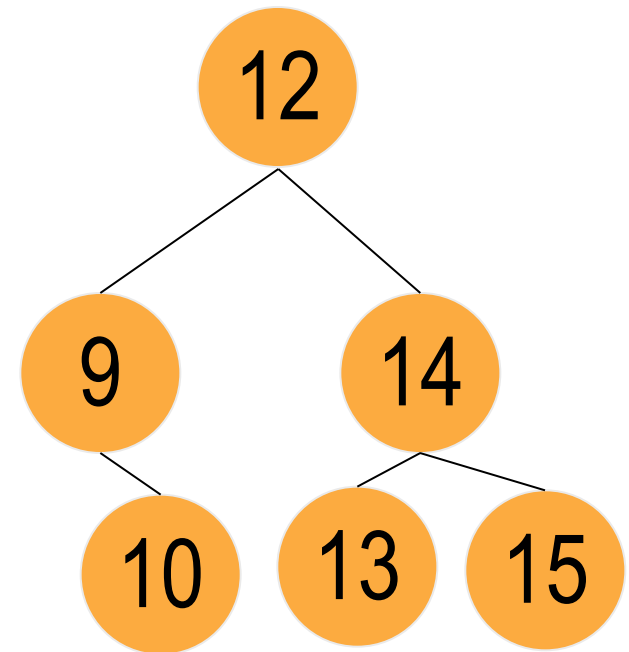
# Remoção – Caso 3

- Eliminando-se o nó de chave 11
- Neste caso, existem 2 opções:
  - A chave 10 pode “ocupar” o lugar do nó-raiz, ou
  - A chave 12 pode “ocupar” o lugar do nó-raiz
  - O nó cuja chave substituiu a raiz é removido



# Remoção – Caso 3

- Esse terceiro caso, também se aplica ao nó com chave 14, caso seja retirado.
  - Nessa configuração, os nós com chave 13 ou 15 poderiam ocupar seu lugar.



---

Considere o contexto no programa principal, para a remoção da chave x:

...

```
if (busca_remove(raiz, x)) printf("houve a remoção");  
else printf("x não pertence à árvore");
```

...

---

```

boolean busca_remove(tree *raiz, tipo_elem x){
    /*retorna true se removeu x; false, se x não estava na árvore*/

    if (raiz == NULL)
        /*árvore vazia; x não está na árvore*/
        return FALSE;

    if (raiz->info == x) { /*achou x: eliminar*/
        removerNo(&raiz);
        /*se alterar raiz no procedimento, altera aqui*/
        return TRUE;
    }

    if (raiz->info < x)
        /*buscar e remover na sub-árvore direita*/
        return busca_remove(&raiz->dir, x);
    else
        /*buscar e remover na sub-árvore esquerda*/
        return busca_remove(&raiz->esq, x);
}

```

Repare no efeito da passagem por endereço da variável raiz nas funções  
removerNo() e busca\_remove()

```

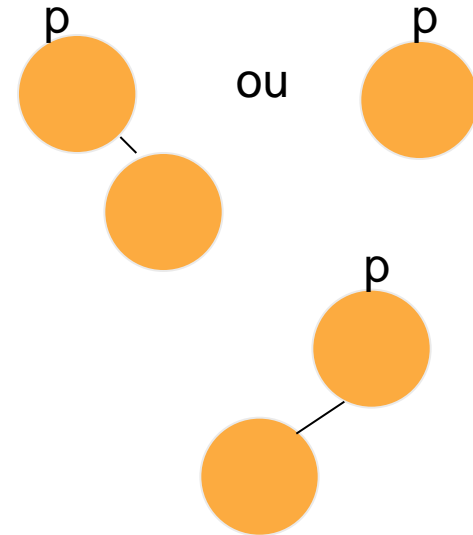
void removerNo (pno *p) {
    /* p é o ponteiro para o nó a ser removido; retorna em p
    o ponteiro para o nó que o substituiu */

    pno q;

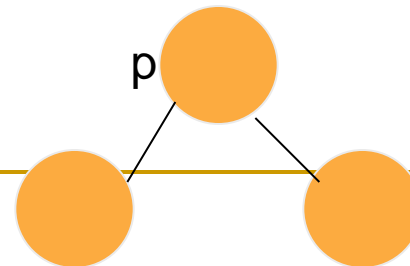
    if (p->esq == NULL) {
        /* substitui por filho à direita */
        q = p;  p = p->dir;  free(q);
    } else if (p->dir == NULL) {
        /* substitui por filho à esquerda */
        q = p;  p = p->esq;  free(q);
    } else

        substituiMenorADireita(&p, &p->dir);
        /*alternativamente:substituirmaioraEsquerda(p,p->esq)*/
}

```



Repare que ao alterar p, alteramos o parâmetro atual (veja quem é ele na função busca\_remove)

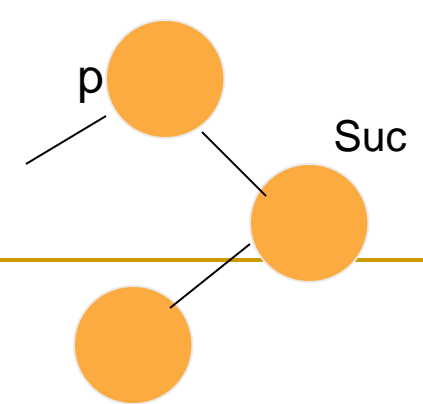
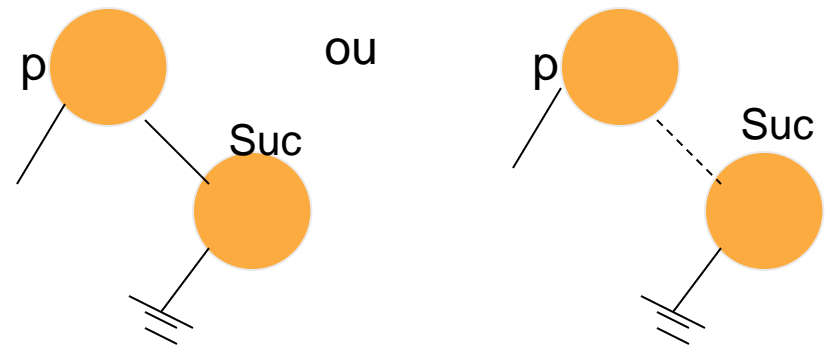


```
void substituienoradireita(pno *p, pno *suc){
```

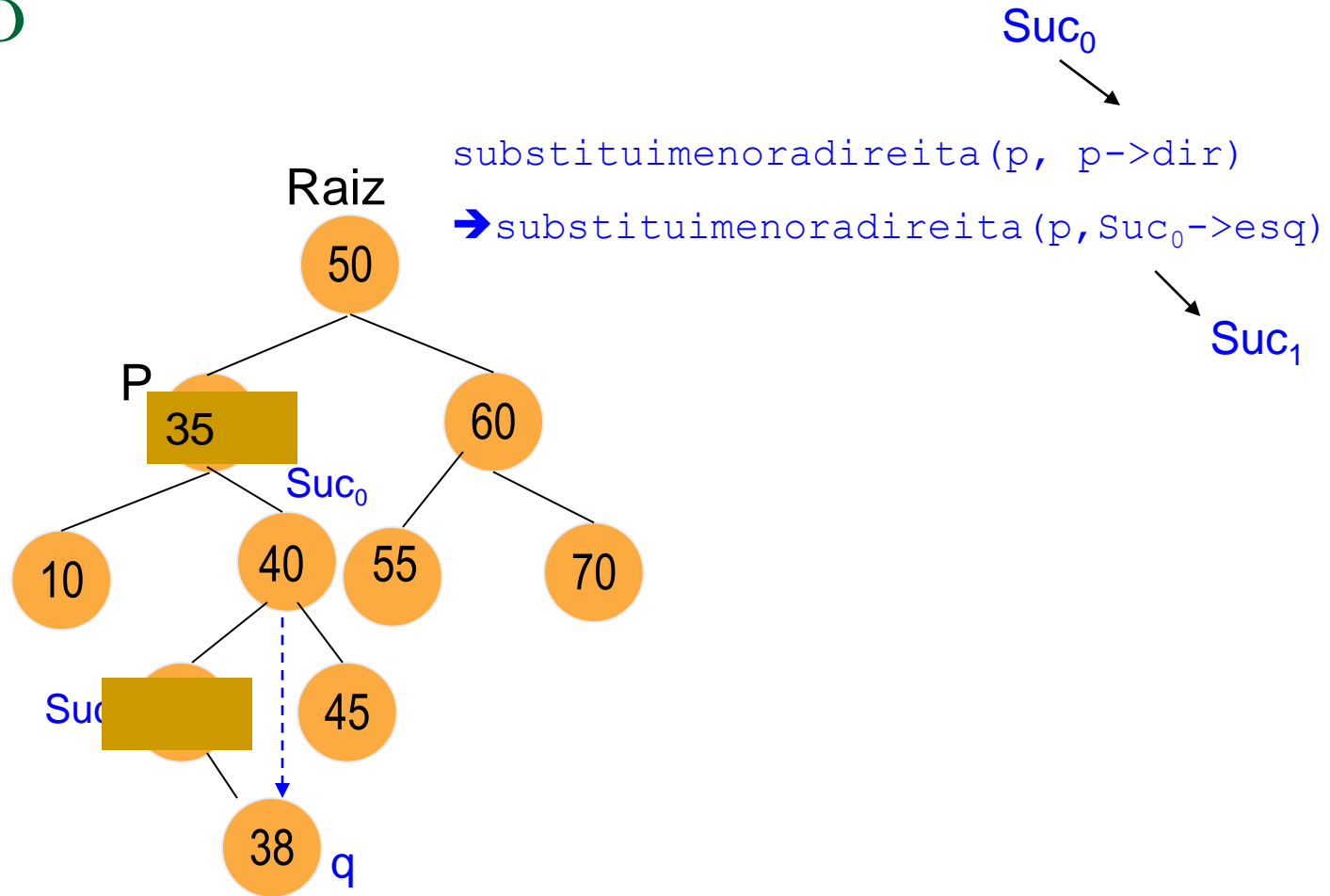
```
    /*encontra o sucessor de p, ou seja, o descendente
mais a esquerda da sub-arvore à direita de p. É um nó
terminal - seu conteúdo é copiado em q e ele será
removido*/
```

```
    pno q;
```

```
    if (suc->esq == NULL) {
        p->info = suc->info;
        /*remover suc*/
        q = suc;
        suc = suc->dir; /*altera p->dir*/
        free(q);
    } else
        substituienoradireita(&p, &suc->esq);
}
```



# Exemplo



# Custo da Operação de Remoção

- A remoção requer uma busca pela chave do nó a ser removido, portanto, com custo de uma busca qualquer (tempo proporcional à altura da árvore).
- O custo da remoção, após a localização do nó dependerá de 2 fatores:
  - do caso em que se enquadra a remoção: se o nó tem 0, 1 ou 2 sub-árvores; se 0 ou 1 filho, custo é constante.
  - de sua posição na árvore, caso tenha 2 sub-árvores (quanto mais próximo do último nível, menor esse custo)
- Repare que um maior custo na busca implica num menor custo na remoção pp. dita; e vice-versa.
- Logo, tem complexidade dependente da altura da árvore.



# Consequências das operações de inserção e eliminação

- Uma ABB balanceada ou perfeitamente balanceada tem a organização ideal para buscas.
  - Inserções e eliminações podem desbalancear uma ABB, tornando futuras buscas ineficientes.
  - Possível solução:
    - Construir uma ABB inicialmente perfeitamente balanceada (algoritmo a seguir)
    - após várias inserções/eliminações, aplicamos um processo de rebalanceamento (algoritmo a seguir)
-

---

# Algoritmo para criar uma ABB Perfeitamente Balanceada

1. Ordenar num array os registros em ordem crescente das chaves;
  2. O registro do meio é inserido na ABB vazia (como raiz);
  3. Tome a metade esquerda do array e repita o passo 2 para a sub-árvore esquerda;
  4. Idem para a metade direita e sub-árvore direita;
  5. Repita o processo até não poder dividir mais.
-

---

# Algoritmo de Rebalanceamento

1. Percorra em In-ordem a árvore para obter uma sequência ordenada em array.
  2. Repita os passos 2 a 5 do algoritmo de criação de ABB PB.
-

# ABB: Resumo

- Boa opção como ED para aplicações de pesquisa (busca) de chaves, SE árvore balanceada →  $O(\log_2 n)$
- Inserções (como folhas) e Eliminações (mais complexas) causam desbalanceamento.
- Inserções: melhor se em ordem aleatória de chaves, para evitar linearização (se ordenadas)
- Para manter o balanceamento, 2 opções:
  - como descrito anteriormente
  - **Árvores AVL**