Lista 2

Da lista 2 os itens 1 e 2 não são subespaços o resto todos são subespaços vetoriais. Segue abaixo a resolução de alguns dos itens.

1.) $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq, y \geq 0\}$.

Demonstração:

- Seja $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ então como $0 \geq 0$, segue que $(0, 0) \in W$.
- Sejam $u = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2) \in W$ então como $x_1, y_1, x_2, y_2 \geq 0$, tem-se que $x_1+x_2 \geq 0$ e $y_1+y_2 \geq 0$. Portanto $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) \in W$.
- Sejam $w = (x, y) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então se tomarmos $\alpha < 0$ temos $\alpha x < 0$. Portanto $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \notin W$. ■

Portanto pelo W não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

5.) $V = M_{n\times n}(\mathbb{R}), W = \{A \in V; A^t = A\}$.

Demonstração:

- Seja a matriz nula $0 \in V$. Então $0^t = 0$. Portanto $0 \in W$.
- Sejam duas matrizes $A, B \in W$, isto é, $A^t = A$ e $B^t = B$. Então $(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$. Logo $A + B \in W$.
- Sejam $A \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim $(\alpha A)^t = \alpha(A^t) = \alpha A$ (esta última igualdade vale do fato de $A \in W$).

Assim W é subespaço de V. ■

8.) $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $W = \{f \in V; f(x_0) = 0\}$ para algum x_0 fixo.

Demonstração:

- Seja a função nula $f_0 \in V$, isto é, $f_0(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Então $f(x_0) = 0$. Portanto $f_0 \in W$.
- Sejam duas funções $f, g \in W$, isto é, $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$. Então $(f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 0 + 0 = 0$. Logo $f + g \in W$.
- Sejam $f \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim $(\alpha f)(x_0) = \alpha(f(x_0)) = \alpha 0 = 0$ (esta última igualdade vale do fato de $f \in W$).

Assim W é subespaço de V. ■