# Métodos de Ordenação
## Parte 3

**SCC-601 Introdução à Ciência da Computação II**

Rosane Minghim
2010

Baseado no material dos Professores Rudinei Goularte e Thiago Pardo



## Ordenação por Seleção

- Idéia básica: os elementos são selecionados e dispostos em suas posições corretas
  - Seleção direta (ou simples), ou classificação de deslocamento descendente
  - Heap-sort, ou método do monte



## Seleção Direta

- Método
  1. Selecionar o elemento que apresenta o menor valor
  2. Trocar o elemento de lugar com o primeiro elemento da seqüência, x[0]
  3. Repetir as operações 1 e 2, envolvendo agora apenas os n-1 elementos restantes, depois os n-2 elementos, etc., até restar somente um elemento, o maior deles



## Seleção Direta

- x = 44 , 55 , 12 , 42 , 94 , 18 , 06 , 67

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (vetor original) | 44 55 12 42 94 18 06 67 |
| passo 1 (06) | 06 55 12 42 94 18 44 67 |
| passo 2 (12) | 06 12 55 42 94 18 44 67 |
| passo 3 (18) | 06 12 18 42 94 55 44 67 |
| passo 4 (42) | 06 12 18 42 94 55 44 67 |
| passo 5 (44) | 06 12 18 42 44 55 94 67 |
| passo 6 (55) | 06 12 18 42 44 55 94 67 |
| passo 7 (67) | 06 12 18 42 44 55 67 94 |

## Seleção Direta

- No i-ésimo passo, o elemento com o menor valor entre x[i], ..., x[n] é selecionado e trocado com x[i]
- Como resultado, após i passos, os elementos x[1], ..., x[i] estão ordenados

5

## Seleção Direta

- Exercício
  - Implementar a Seleção Direta
  - Calcular a complexidade

6

## Seleção Direta

```
void selecao(int x[], int n) {
    int i, j, menor, index;
    for (i = 0; i < n-1; i++) {
        menor = x[ i ];
        index = i;
        for (j = i+1; j < n; j++) {
            if (x[ j ] < menor) {
                menor = x[ j ];
                index = j;
            }
        }
        x[ index ] = x[ i ];
        x[ i ] = menor;
    }
}
```

7

## Seleção Direta

- No primeiro passo ocorrem n - 1 comparações, no segundo passo n - 2, e assim por diante
  - Logo, no total, tem-se (n - 1) + (n -2) + ... + 1 = n * (n -1)/2 comparações: $O(n^2)$
- Não existe melhora se a entrada está completamente ordenada ou desordenada
- Exige pouco espaço
- É melhor que o Bubble-sort
- É útil apenas quando n é pequeno

8

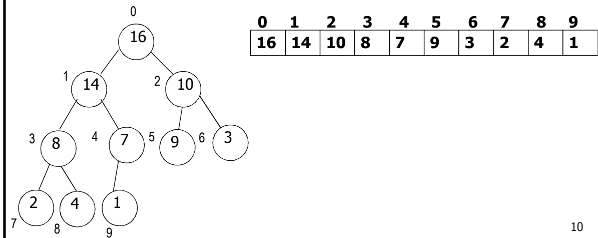
## Heap-sort

- Utiliza uma estrutura de dados - um heap – para ordenar os elementos
  - Atenção: a palavra *heap* é utilizada atualmente em algumas linguagens de programação para se referir ao "espaço de armazenamento de lixo coletado"

9

## Heap-sort

- Um heap é um vetor que implementa (representa) uma árvore binária <u>quase completa</u>



| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 14 | 10 | 8 | 7 | 9 | 3 | 2 | 4 | 1 |

10

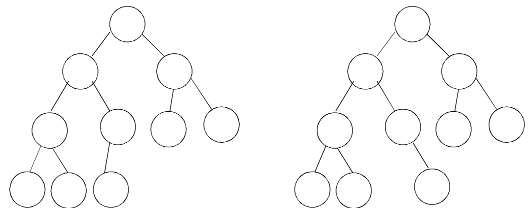
## Heap-sort

- Uma árvore binária de profundidade/nível d é uma árvore binária quase completa se:
  - Cada folha estiver no nível d ou d – 1
  - Para cada nó v da árvore com descendente direito no nível d, todos os descendentes esquerdos de v que forem folhas estiverem também no nível d

11

## Heap-sort

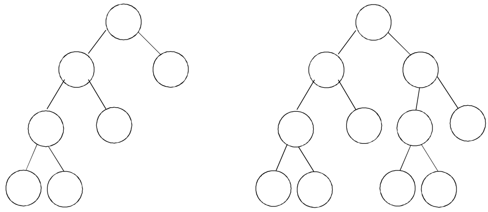
- Exemplos de árvores binárias quase completas



12

## Heap-sort

- Exemplos de árvores binárias que não são quase completas
  - Por quê?



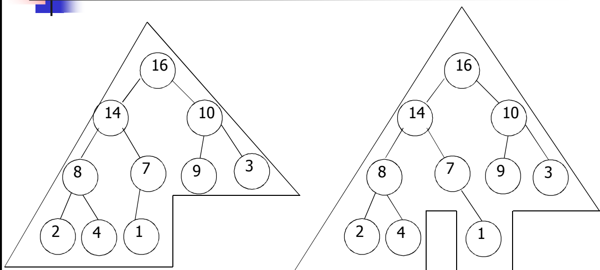


## Heap-sort

- Um heap observa conceitos de ordem e de forma
  - Ordem: o item de qualquer nó deve satisfazer uma relação de ordem com os itens dos nós filhos
    - **Heap máximo** (ou descendente): pai >= filhos, sendo que a raiz é o maior elemento
      - *Propriedade de heap máximo*
    - Heap mínimo (ou heap ascendente): pai <= filhos, sendo que a raiz é o menor elemento
      - *Propriedade de heap mínimo*
  - Forma: a árvore binária tem seus nós-folha, no máximo, em dois níveis, sendo que as folhas devem estar o mais à esquerda possível



## Heap-sort



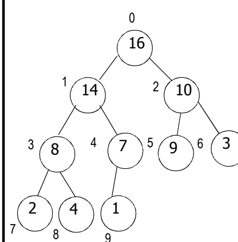

É um heap máximo

Não é um heap máximo



## Heap-sort

- Como acessar os elementos (pai e filhos de cada nó) no heap?




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 14 | 10 | 8 | 7 | 9 | 3 | 2 | 4 | 1 |

Filhos do nó k:
- filho esquerdo = 2k + 1
- filho direito = 2k + 2

Pai do nó k: (k-1)/2

Folhas de n/2 em diante

## Heap-sort

- Assume-se que:
  - A raiz está sempre na posição 0 do vetor
  - comprimento(vetor) indica o número de elementos do vetor
  - tamanho_do_heap(vetor) indica o número de elementos no heap armazenado dentro do vetor
    - Ou seja, embora A[1..comprimento(A)] contenha números válidos, nenhum elemento além de A[tamanho_do_heap(A)] é um elemento do heap, sendo que tamanho_do_heap(A)<=comprimento(A)

17

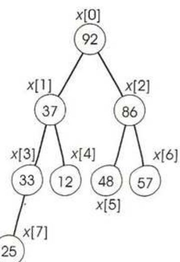
## Heap-sort

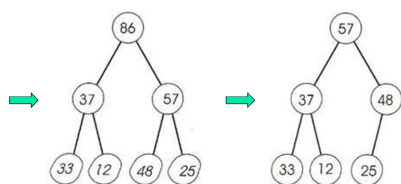
- A idéia para ordenar usando um heap é:
  - Construir um heap máximo
  - Trocar a raiz – o maior elemento – com o elemento da última posição do vetor
  - Diminuir o tamanho do heap em 1
  - Rearranjar o heap máximo, se necessário
  - Repetir o processo n-1 vezes

18

## Heap-sort: exemplo

1) Monta-se o heap com base no vetor desordenado




3) Troca-se a raiz com o último elemento (x[6]) e rearranja-se o heap

57
37
48
33
12
25

2) Troca-se a raiz (maior elemento) com o último elemento (x[7]) e rearranja-se o heap

19

## Heap-sort

- O processo continua até todos os elementos terem sido incluídos no vetor de forma ordenada
- É necessário:
  - Saber construir um heap a partir de um vetor qualquer
    - Procedimento *build_max_heap*
  - Saber como rearranjar o heap, i.e., manter a propriedade de heap máximo
    - Procedimento *max_heapify*

20

## Heap-sort

- Procedimento **max_heapify**: manutenção da propriedade de heap máximo
  - Recebe como entrada um vetor A e um índice i
  - Assume que as árvores binárias com raízes nos filhos esquerdo e direito de i são heap máximos, mas que A[i] pode ser menor que seus filhos, violando a propriedade de heap máximo
  - A função do procedimento max_heapify é deixar A[i] "escorregar" para a posição correta, de tal forma que a subárvore com raiz em i torne-se um heap máximo



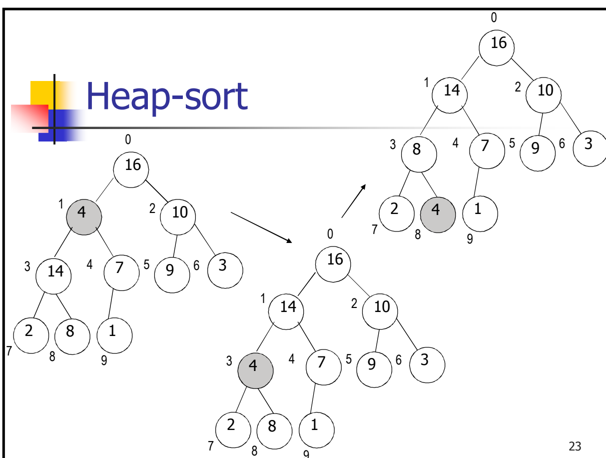
## Heap-sort

- Exemplo
  - Chamando a função max_heapify para um heap hipotético

max_heapify(A,1)



## Heap-sort





## Heap-sort

- Na realidade, trabalhando-se com o vetor A

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 4 | 10 | 14 | 7 | 9 | 3 | 2 | 8 | 1 |

Execução de max_heapify(A,1)

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 14 | 10 | 4 | 7 | 9 | 3 | 2 | 8 | 1 |

Execução recursiva de max_heapify(A,3)

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 14 | 10 | 8 | 7 | 9 | 3 | 2 | 4 | 1 |

## Heap-sort

- Implementação e análise da sub-rotina max_heapify



## Heap-sort

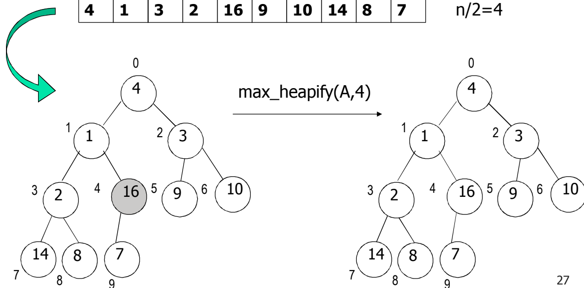
- Lembrete: as folhas do heap começam na posição n/2+1
- Procedimento build_max_heap
  - Percorre de forma ascendente os primeiros n/2 nós (que não são folhas) e executa o procedimento max_heapify
  - A cada chamada do max_heapify para um nó, as duas árvores com raiz neste nó tornam-se heaps máximos
  - Ao chamar o max_heapify para a raiz, o heap máximo completo é obtido



## Heap-sort

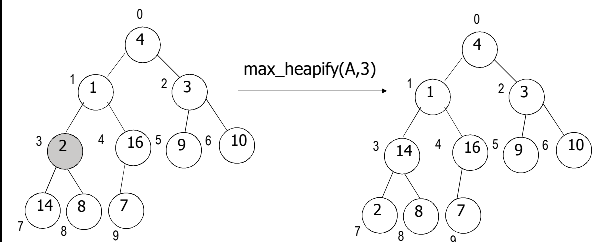
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7 |

n/2=4

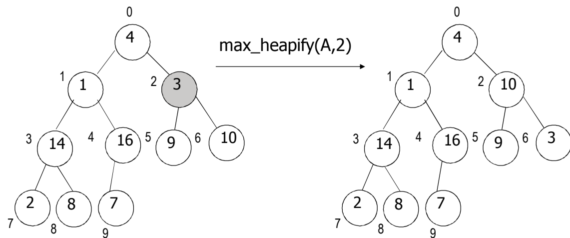





## Heap-sort

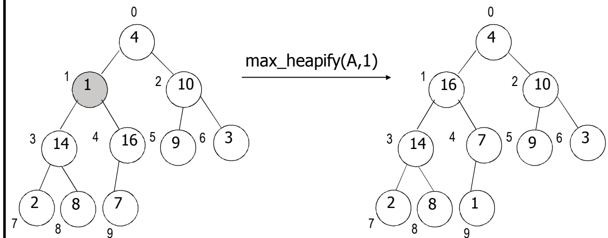


## Heap-sort





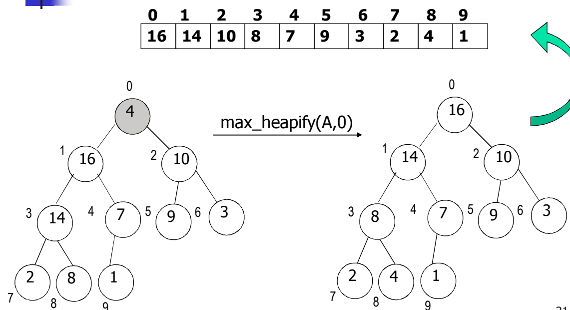

## Heap-sort






## Heap-sort

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 14 | 10 | 8 | 7 | 9 | 3 | 2 | 4 | 1 |






## Heap-sort

- Implementação e análise da sub-rotina build_max_heap

# Heap-sort

- Retomando...
  - Procedimento **heap-sort**
    1. Construir um heap máximo (via **build_max_heap**)
    2. Trocar a raiz – o maior elemento – com o elemento da última posição do vetor
    3. Diminuir o tamanho do heap em 1
    4. Rearranjar o heap máximo, se necessário (via **max_heapify**)
    5. Repetir o processo n-1 vezes



# Heap-sort

- Dado o vetor:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7 |

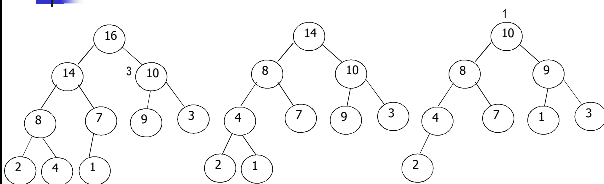
- Chamar bulid_max_heap e obter:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 14 | 10 | 8 | 7 | 9 | 3 | 2 | 4 | 1 |

- Executar os passos de 2 a 4 n – 1 vezes



# Heap-sort




...

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 8 | 9 | 10 | 14 | 16 |

Vetor ordenado!



# Heap-sort

- Implementação e análise da sub-rotina heap-sort

## Heap-sort

- O método é O(n log(n)), sendo eficiente mesmo quando o vetor já está ordenado
  - n-1 chamadas a max_heapify, de O(log(n))
    - build_max_heap é O(n)

37