SMA 333 - Cálculo III - 2ª Lista de Exercícios - 04/03/2011

1. Determine o intervalo de convergência de cada uma das seguintes séries e também a soma nesse intervalo:

   (a) $1 + (x+3)^2 + (x+3)^4 + (x+3)^6 + \cdots$

   (b) $1 + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \cdots$

   (c) $1 + 2\sin x + 4\sin^2 x + 8\sin^3 x + \cdots$

   (d) $\frac{1}{3}\left[1 + \frac{3}{4x} + \left(\frac{3}{4x}\right)^2 + \left(\frac{3}{4x}\right)^3 + \cdots\right]$

2. Mostre que $1 + 2\sin^2\theta + 4\sin^4\theta + 8\sin^4\theta + \cdots = \sec 2\theta$ para valores convenientes de θ.

3. Obtenha as seguintes fórmulas sem tentar justificar os passos. Veremos depois que essas fórmulas são todas válidas, pelo menos para $-1 < x < 1$.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2!}x^n = \frac{1}{(1-x)^3}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$

4. Verifique que a derivação da série de potências de $\sin x$ dá a série de potências de $\cos x$.

5. Encontre os primeiros termos da série de potência de $\tan x$. Observe que não há nenhum padrão simples para os coeficientes.

6. Seja p um número real fixado, porém arbitrário. Use a definição de séries de potências para obter a série binomial válida para $|x| < 1$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

   Observe que essa série de potências é um polinômio sempre que p é um inteiro não negativo e somente nesse caso.

7. Use o exercício anterior para deduzir as seguintes séries:

   (a) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ válido para $-1 < x < 1$;

   (b) $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots$ válido para $-1 < x < 1$

   (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$ válido para $-1 < x < 1$

8. Use o exercício anterior para obter a série

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Sugestão: $\arcsin x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-tr}} dt.$

9. Na série

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{3}{7} - \frac{4}{9} + \cdots$$

os numeradores formam a sequência de inteiros positivos, os denominadores formam a sequência de ímpares começando em 3 e os termos tem sinais alternados.

   (a) Escreva a série usando a notação de somatório.

   (b) Mostre que ela diverge.

10. Use a série de potências da função exponencial e^x para calcular as somas das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!}$