

1. (Este exercício é para introduzir o conceito de **ínfimo** de um conjunto) Seja A um subconjunto de \mathbb{R} não vazio. Um número $l \in \mathbb{R}$ é uma cota inferior ou limitante inferior se $l \leq x$, para todo $x \in A$. Um A um subconjunto de \mathbb{R} se diz limitado inferiormente se ele possui cota inferior. O *ínfimo* de um conjunto limitado inferiormente A , que denotamos por $\inf A$, é definido como a maior das cotas inferiores.

Prove que se um subconjunto A de \mathbb{R} não vazio é limitado inferiormente, então A tem ínfimo.

2. Antes de propor o exercício, precisamos das seguintes definições:

Quando o supremo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ pertence a A , ele é chamado máximo e é denotado por $\max A$.

Quando o ínfimo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ pertence a A , ele é chamado mínimo e é denotado por $\min A$.

Agora vamos ao exercício: indique o sup, inf, max, min dos seguintes conjuntos, se existirem:

$$A = \{n \in \mathbb{Z}; |n| < 10\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{Z}; |n| \leq 10\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q}; |x| < \sqrt{3}\}$$

$$D = [-1, 1) \cup (\sqrt{3}, 4)$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 4x + 4 > 0 \text{ e } x^2 - 3x < 0\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R}; x = m + 1/n, m, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{R}; x = 1/(m+n), m, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R}; x = 1/m + 1/n, m, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

3. Se $A, B \subset \mathbb{R}$ são não vazios e $\alpha \in \mathbb{R}$, defina os conjuntos

$$A + B = \{z; z = x + y, x \in A, y \in B\}$$

$$|A| = \{z; z = |x|, x \in A\}$$

$$\alpha A = \{z; z = \alpha x, x \in A\}$$

O que se pode dizer de $\sup(A + B)$, $\sup |A|$, $\sup \alpha A$, em termos de sup ou inf de A e B ? Considere os casos $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ e $\alpha = 0$.

4. Sejam $A \subset B$ conjuntos não vazios e limitados. Prove que

$$\inf B \leq \inf A \quad \text{e} \quad \sup A \leq \sup B.$$

Os dois exercícios a seguir precisam da matéria será estudada na próxima aula (12/03).

5. Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, denota-se com A' o conjunto de todos os pontos de acumulação de A . Em cada um dos casos a seguir, indique o conjunto A' :

(a) $A = [-1, 1) \cup (\sqrt{3}, 4)$

(b) $A = \{n \in \mathbb{Z}; |n| \leq 10\}$

(c) $A = \{x \in \mathbb{Q}; |x| \leq \sqrt{3}\}$

(d) $A = \{x \in \mathbb{R}; |x| = m + \frac{1}{n}, m, n = 1, 2, 3, \dots\}$

6. Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, limitado superiormente, e $L = \sup A$. Mostre que $L = \max A$ ou L é um ponto de acumulação de A .