1. (Este exercício é para introduzir o conceito de **ínfimo** de um conjunto) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio. Um número $l \in \mathbb{R}$ é uma cota inferior ou limitante inferior se $l \leq x$, para todo $x \in A$. Um A um subconjunto de $\mathbb{R}$ se diz limitado inferiormente se ele possui cota inferior. O *ínfimo* de um conjunto limitado inferiormente A, que denotamos por $\inf A$, é definido como a maior das cotas inferiores.

   Prove que se um subconjunto A de $\mathbb{R}$ não vazio é limitado inferiormente, então A tem ínfimo.

   í í

2. Antes de propor o exercício, precisamos das seguintes definições:

   Quando o supremo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ pertence a A, ele é chamado máximo e é denotado por $\max A$.

   Quando o ínfimo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ pertence a A, ele é chamado máximo e é denotado por $\min A$.

   Agora vamos ao exercício: indique o $\sup, \inf, \max, \min$ dos seguintes conjuntos, se existirem:

   $A = \{n \in \mathbb{Z};\ |n| < 10\}$
   $B = \{n \in \mathbb{Z};\ |n| \leq 10\}$
   $C = \{x \in \mathbb{Q};\ |x| < \sqrt{3}\}$
   $D = [-1, 1) \cup (\sqrt{3}, 4)$
   $E = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 4x + 4 > 0$ e $x^2 - 3x < 0\}$
   $F = \{x \in \mathbb{R};\ x = m + 1/n,\ m, n = 1, 2, 3, \cdots\}$
   $G = \{x \in \mathbb{R};\ x = 1/(m + n),\ m, n = 1, 2, 3, \cdots\}$
   $H = \{x \in \mathbb{R};\ x = 1/m + 1/n,\ m, n = 1, 2, 3, \cdots\}$

3. Se $A, B \subset \mathbb{R}$ são não vazios e $\alpha \in \mathbb{R}$, defina os conjuntos

   $A + B = \{z;\ z = x + y, x \in A, y \in B\}$
   $|A| = \{z;\ z = |x|, x \in A\}$
   $\alpha A = \{z;\ z = \alpha x, x \in A\}$

   O que se pode dizer de $\sup(A + B)$, $\sup |A|$, $\sup \alpha A$, em termos de $\sup$ ou $\inf$ de A e B? Considere os casos $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ e $\alpha = 0$.

4. Sejam $A \subset B$ conjuntos não vazios e limitados. Prove que

   $$\inf B \leq \inf A \quad \text{e} \quad \sup A \leq \sup B.$$

   Os dois exercícios a seguir precisam da matéria será estuda na próxima aula (12/03).

5. Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, denota-se com A' o conjunto de todos os pontos de acumulação de A. Em cada um dos casos a seguir, indique o conjunto A':

   (a) $A = [-1, 1) \cup (\sqrt{3}, 4)$
   (b) $A = \{n \in \mathbb{Z};\ |n| \leq 10\}$
   (c) $A = \{x \in \mathbb{Q};\ |x| \leq \sqrt{3}\}$
   (d) $A = \{x \in \mathbb{R};\ |x| = m + \frac{1}{n},\ m, n = 1, 2, 3, \cdots\}$

6. Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, limitado superiormente, e $L = \sup A$. Mostre que $L = \max A$ ou L é um ponto de acumulação de A.