

CALCULO NUMÉRICO I

1º Lista: Equações não lineares

1. a. Deduza, usando argumentos gráficos, o método de Newton para resolver uma equação do tipo: $f(x)=0$.

b. O método de Newton sempre converge? O que significa convergência quadrática? O método de Newton sempre tem este tipo de convergência? Quais as hipóteses necessárias? Prove.

2. Considere a equação: $x \ln(x)-1=0$. (utilize na resolução numérica 5 algarismos significativos; tolerância no critério de parada de 10^{-3} e deixe explícito o critério de parada).

a. Localize um intervalo que contenha a solução (utilize sua forma equivalente: $1/x=\ln(x)$). Mostre que $\bar{x} \in [1, 2]$

b. Resolva usando os método da bissecção, a partir do intervalo $[1, 2]$.

c. Resolva a equação usando o método de Newton, com $x_0 = 1.2$.

d. O processo iterativo: $x_{k+1}=1/\ln(x_k)$ é convergente? Justifique teoricamente sua afirmação.

e. O processo iterativo dado por: $x_{k+1}=e^{1/x_k}$ é convergente? Justifique teoricamente sua afirmação.

3. Considere a equação: $x = \cos x$. (defina o critério de parada e use tolerância 10^{-4}).

a. Verifique graficamente que existe uma raiz da equação. Identifique a raiz no gráfico e uma aproximação inicial para os itens seguintes.

b. Verifique numericamente, calculando as iterações que o processo iterativo $x_{k+1} = \cos x_k$ é convergente. (obs. sua máquina deve estar em radianos)

c. Verifique teoricamente que o processo iterativo $x_{k+1} = \cos x_k$ é convergente para x_0 próximo da raiz.

d. Escolha um ponto inicial e aplique o método de Newton.

4. Considere a equação: $x^2 = \cos x$. (defina o critério de parada e use tolerância 10^{-4}).

a. Verifique graficamente que existe uma raiz da equação no intervalo $[0, 1.57]$

b. É possível aplicar o método da bissecção a partir do intervalo $[0, 1.57]$? (escreva explicitamente as condições de aplicabilidade do método).

c. Determine a solução pelo método da bissecção.

d. O método de Newton pode ser aplicado para resolver a equação com $x_0 = 0$? Por que?

e. Escolha um ponto inicial e aplique o método de Newton.

5. Considere a função: $f(x) = x^3 - x - 1$.

a. Esboce o gráfico de $f(x)$ e uma raiz real de $f(x)$.

b. Aplique o método de Newton utilizando um ponto escolhido no item anterior.

c. Quais dos processos iterativos abaixo fazem sentido para determinar uma raiz de $f(x)$?

i. $x_{i+1} = \sqrt[3]{(x_i + 1)}$

ii. $x_{i+1} = x_i^3 + 1$

iii. $x_{i+1} = x_i^2 - 1$

d. O processo iterativo em ii) é convergente? Argumente baseado em teoria.

6. Considere o processo iterativo: $x_{k+1} = 0.5(x_k + 3/x_k)$.

a. A partir de $x_0=1.3$, determine a sequência: x_1, x_2, \dots até obter a convergência.

b. Mostre que, se o processo for convergente, então convergirá para $\sqrt{3}$.

c. Defina convergência quadrática para uma sequência e comente se a sequência $|x_1 - \sqrt{3}|, |x_2 - \sqrt{3}|, \dots$ converge quadraticamente.

d. Mostre, teoricamente, que o processo é convergente para algum x_0 .

e. Escreva um algoritmo para gerar a sequência, incluindo o teste de parada.

f. Mostre que o processo iterativo é o método de Newton aplicado à equação: $x^2-3=0$. À luz deste fato, interprete graficamente o processo iterativo dado inicialmente.

7. Mostre que o processo iterativo: $x_{k+1} = x_k(2-ax_k)$ sempre converge para o valor de $1/a$, se x_0 for adequadamente escolhido.

Que limites deve x_0 satisfazer para assegurar a convergência?

Mostre que o processo iterativo é o método de Newton aplicado à equação: $\frac{1}{x} - a = 0$

8. Uma desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter $f'(x)$, bem como calcular seu valor numérico, a cada iteração.

Dê uma modificação a fim de eliminar esse problema? (método das secantes).

Resolva a equação do exercício 4 pelo método das secantes.

9. Determine a raiz da equação $x = \operatorname{tg} x$ no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ pelos métodos de Newton e das secantes, com erro inferior a 10^{-3} .

10. Aplique o método de Newton para resolver o sistema não linear seguinte:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 2 \\ x_1^2 - x_2^2 = 1 \end{cases}$$

Use o ponto inicial: $(1.22 \ 0.71)^T$.

11. Determine um ponto de interseção entre duas circunferências de raio 2, sendo a primeira centrada em $(1, 0)$ e a segunda centrada no ponto: $(0, 1)$.

Faça um gráfico e escolha um ponto aproximado x^0 .

Aplique o método de Newton. Calcule x^1, x^2, x^3 .

A sequência está convergindo? Comente a sua resposta.

12. Considere o sistema de equações não-linear:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases}$$

a. Represente num plano cartesiano os conjuntos de pontos que satisfazem cada uma das equações acima.

b. Determine uma solução pelo método de Newton, tomando como ponto de partida: $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

13. Considere o sistema não linear abaixo

$$\begin{cases} 3x_1^2 x_2 - x_2^3 - 4 = 0 \\ x_1^2 + x_1 x_2^3 - 9 = 0 \end{cases}$$

a. Escreva o sistema na forma geral: $F(x)=0$, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (defina n e a função F).

b. Faça o desenvolvimento por Taylor até a 1ª. ordem da F obtida no item a. e explique como construir o método de Newton.

c. Com o ponto inicial: $x^0 = (1.6 \ 2.1)^T$, resolva o sistema pelo método de Newton (máximo 3 iterações).

d. O método de Newton pode falhar? Ou sempre converge? Comente.

14. Considere o sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = -3 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 = 4 \\ x_1 x_2 x_3 = 2 \end{cases}$$

- a. Escreva o sistema acima na forma $\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. Explícite \mathbf{F} e \mathbf{F}' (sua derivada). Verifique que $\mathbf{x} = (1 \ 2 \ 1)^T$ é uma raiz de \mathbf{F} .
- b. Aplique o método de Newton, tomando o ponto inicial $\mathbf{x}^0=(1 \ 1 \ 1)^T$ e calcule \mathbf{x}^1 e \mathbf{x}^2 . Verifique se \mathbf{x}^2 satisfaz o critério de parada. Na sua opinião, a seqüência deve convergir? Por que?
- c. O ponto $\mathbf{x}^0=(0 \ 0 \ 0)^T$ pode ser utilizado? Por que?

15. Considere o seguinte pseudo-código incompleto do método de Newton:

Definições prévias:

- $f(x)$: retorna o valor da função avaliada em x
- $df(x)$: retorna o valor da derivada da função avaliada em x
- x_0 : aproximação inicial fornecido pelo usuário
- MAX : limitante para o número de iterações fornecido pelo usuário
- TOL : número pequeno para tolerância para o número zero
- $pare = falso$ {interrompe o processo iterativo quando $pare = verdadeiro$ }
- $k=0$ {contador de iterações}

Enquanto $pare=falso$ **faça**:

início-enquanto

$$x_1 \leftarrow x_0 - f(x_0)/df(x_0)$$

$$x_0 \leftarrow x_1$$

$$k \leftarrow k+1$$

fim-enquanto.

- i. Inclua adequadamente no pseudo-código, critérios de parada de modo que:
- a. o número de iterações não ultrapasse o parâmetro MAX .
 - b. o valor da função próximo de zero.
- ii. Caso $df(x_0)=0$ o algoritmo falha. Explique porque no algoritmo e em um gráfico.
- iii. Refine um pouco mais o pseudo-código, incluindo o teste $df(x_0)=0$ (use TOL).

16. Considere a equação: $f(x)=0$, $f:R \rightarrow R$, $f \in C^3$ e \bar{x} uma raiz, isto é, $\mathbf{f}(\bar{x}) = \mathbf{0}$.

- a. Suponha que $\mathbf{f}'(\bar{x}) \neq \mathbf{0}$. Interprete num gráfico o método de Newton e mostre que converge, para x_0 suficientemente próximo de \bar{x} (sugestão: Mostre que a função de iteração de Newton satisfaz $\varphi'(\bar{x}) = \mathbf{0}$).
- b. Suponha que $\mathbf{f}'(\bar{x}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{f}''(\bar{x}) > \mathbf{0}$. Interprete num gráfico o método de Newton e mostre que converge, para x_0 suficientemente próximo de \bar{x} . (sugestão: Mostre que a função de iteração de Newton satisfaz $|\varphi'(\bar{x})| = \frac{1}{2}$. Use a regra de L'hospital para resolver a indeterminação $0/0$).
- c. Suponha que $\mathbf{f}'(\bar{x}) = \mathbf{0}$ e $f''(\bar{x}) < 0$. Interprete num gráfico o método de Newton e mostre que converge, para x_0 suficientemente próximo de \bar{x} . (sugestão: Mostre que a função de iteração de Newton satisfaz $|\varphi'(\bar{x})| = \frac{1}{2}$. Use a regra de L'hospital para resolver a indeterminação $0/0$).

17. Considere que um método iterativo tenha sido aplicado para a resolução de $\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$, $\mathbf{F}:R^n \rightarrow R^n$ (sistema de equações não lineares), gerando uma seqüência de vetores do R^n : $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots$ da qual espere-se que convirja para $\bar{\mathbf{x}}$, tal que $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})=\mathbf{0}$.

- a. Defina seqüência convergente.
- b. Computacionalmente, como se identifica uma seqüência convergente?
- c. Explique porque os seguintes critérios de parada são válidos ou não, considerando-se $\varepsilon > 0$, um valor pequeno, escolhido a priori (em caso negativo, dê contra-exemplo):
 - i. máximo $\{ |x_i^{k+1} - x_i^k|, i=1, \dots, n \} < \varepsilon$
 - ii. mínimo $\{ |x_i^{k+1} - x_i^k|, i=1, \dots, n \} < \varepsilon$
 - iii. $|x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon$, para algum i
 - iv. $|x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon$, para todo i
- d. Dê um critério de parada alternativo, além de comparar dois pontos consecutivos da seqüência.