

3ª Lista de Exercícios - SME0822 Análise Multivariada - Profª Cibele Russo

Data: 10/10/2014.

Exercício 1. Seja $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ uma amostra aleatória de vetores de uma distribuição $N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$. Prove que $\hat{\Sigma}$ (o estimador de máxima verossimilhança de Σ) é viesado para Σ e S (a matriz de covariâncias amostrais) é não-viesado para Σ .

Exercício 2. Se Y_1, \dots, Y_n são independentes seguindo distribuições $N_p(\underline{\mu}_i, \Sigma_i)$, $i = 1, \dots, n$, prove que $\sum_{i=1}^n a_i Y_i \sim N_p(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \Sigma_i)$, onde \underline{a} é um vetor de reais.

Exercício 3. Sejam $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$. Defina $Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$.

- (a) Prove que $\text{Cov}(\bar{y}, y_1 - \bar{y}) = 0$ e conclua que \bar{y} é estatisticamente independente de Q .
- (b) Qual a distribuição de Q/σ^2 ?

Exercício 4. Em cada uma das densidades bivariadas a seguir apresente o vetor de médias e a matriz de covariâncias

(a) $f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(y_1 - 1)^2 + (y_2 - 2)^2] \right\}$

(b) $f(y_1, y_2) = \frac{1}{2.4} \exp \left\{ -\frac{y_1^2/4 - 8.8y_1y_2 + y_2^2}{0.72} \right\}$

(c) $f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2 + 4y_1 - 6y_2 + 13) \right\}$

(d) $f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ \frac{1}{2} (2y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 - 22y_1 - 14y_2 + 65) \right\}$

- (e) Há itens em que as variáveis são independentes? Quais?
- (f) Represente graficamente as densidades e curvas de nível de cada item. Podem ser utilizados recursos computacionais (como por exemplo o R).

Exercício 5. Seja $\underline{Y} \sim N_3(0, \Sigma)$, com

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & -0.4 \\ 0.8 & 1 & -0.56 \\ -0.4 & -0.56 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a distribuição condicional de y_1 e y_3 dado y_2 .
- (b) Calcule o coeficiente de correlação parcial entre y_1 e y_3 dado y_2 .

Exercício 6. (a) Calcule a estatística T^2 para o teste $H_0 : \underline{\mu}' = [7 \ 11]$, usando os dados:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 8 & 9 \\ 6 & 9 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

- (b) Especifique a distribuição de T^2 para a situação (a).

(c) Usando (a) e (b), teste H_0 ao nível de significância $\alpha = 0.05$. Qual conclusão você obtém?

Exercício 7. (Mínimos Quadrados Ponderados). Seja

$$\underline{Y}_{(n \times 1)} = \underline{Z}_{(n \times (r+1))} \underline{\beta}_{((r+1) \times 1)} + \underline{\epsilon}_{(n \times 1)}$$

onde $E[\underline{\epsilon}] = \underline{0}$ mas $E[\underline{\epsilon}\underline{\epsilon}'] = \sigma^2 \underline{V}$, com $\underline{V}_{n \times n}$ conhecida e positiva definida. Para \underline{V} de posto completo, mostre que o estimador de mínimos quadrados ponderados é

$$\widehat{\underline{\beta}}_w = (\underline{Z}' \underline{V} \underline{Z})^{-1} \underline{Z}' \underline{V}^{-1} \underline{Y}.$$

Se σ^2 não for conhecido, um estimador não viesado é

$$(n - r - 1)^{-1} \times (\underline{Y} - \underline{Z} \widehat{\underline{\beta}}_w)' \underline{V}^{-1} (\underline{Y} - \underline{Z} \widehat{\underline{\beta}}_w).$$

Dica: $\underline{V}^{-1/2} \underline{Y} = (\underline{V}^{-1/2} \underline{Z}) \underline{\beta} + \underline{V}^{-1/2} \underline{\epsilon}$ é a forma clássica do modelo de regressão linear $\underline{Y}^* = \underline{Z}^* \underline{\beta} + \underline{\epsilon}^*$, com $E[\underline{\epsilon}^*] = \underline{0}$ e $E[\underline{\epsilon}^* \underline{\epsilon}^{*'}] = \sigma^2 \underline{I}$. Assim, $\widehat{\underline{\beta}}_w = \widehat{\underline{\beta}}^* = (\underline{Z}^* \underline{Z}^*)^{-1} \underline{Z}^* \underline{Y}^*$.

Exercício 8. Use o estimador de mínimos quadrados ponderados do exercício anterior para derivar uma expressão para a estimativa da inclinação β no modelo $Y_j = \beta_j z_j + \epsilon_j$, $j = 1, \dots, n$, onde (a) $\text{Var}[\epsilon_j] = \sigma^2$, (b) $\text{Var}[\epsilon_j] = \sigma^2 z_j$, e (c) $\text{Var}[\epsilon_j] = \sigma^2 z_j^2$. Comente de que maneira em que as variâncias desiguais para os erros influencia na escolha ótima para β_w .

Exercício 9. Refazer exemplos de Johnson and Wichern (2007), disponíveis na Coteia WIKI:

- 6.1 pág 276-277
- 6.3 pág 287-288
- 6.10 pág 306-308 (Tabela 6.3 pág 303)

Exercício 10. Resolver exercícios de Johnson and Wichern (2007):

- 5.1, 5.4, 5.7, 5.28, 5.29, pág 261, 270
- 6.6, 6.8 (a, b), pág 338

Exercício 11. Verifique que a estatística T^2 de Hotelling se reduz ao quadrado da estatística t-Student quando $p = 1$.

Exercício 12. Resolver exercícios de Johnson and Wichern (2007):

- 7.3, 7.4, 7.11, 7.13, 7.17 pág 420-423

Referências bibliográficas

- Johnson, R. A. and Wichern, D. W. (2007) Applied Multivariate Statistical Analysis. 5th edition. Prentice-Hall
- Coteia WIKI <http://wiki.icmc.usp.br/index.php/SME-263>.