# SMA 333 - Cálculo III - 3ª Lista de Exercícios - 14/03/2011

1. Estabeleça se cada uma das sequências indicadas converge ou diverge e, se convergir, determine o limite.

   (a) $\sqrt[3]{n}$

   (b) $\sin \frac{\pi}{5n}$

   (c) $\frac{1+(-1)^n}{n}$

   (d) $\frac{\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n}}$

   (e) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   (f) $\ln(n+1) - \ln n$ (ln denota a função logarítmica na base $e$)

   (g) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

   (h) $n \sin \frac{\pi}{n}$

   (i) $\frac{n!}{n^n}$

   (j) $\frac{\ln n}{n}$

   (k) $\int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx$, sendo $\alpha$ um número real dado.

   (l) $\int_0^n \frac{1}{1+x^2} dx$

   (m) $\dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+2n+1}}$

   (n) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left( \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \right)$

   (o) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$

   (p) $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{klnk}$ (Verifique que $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{xlnx} dx = +\infty$)

2. Considere um número de círculos de tamanhos iguais agrupados em $n$ fileiras dentro de um triângulo equilátero. Se $c_n$ denota o número desses círculos, então resulta pela geometria da situação que $c_n = 1$, $c_n = 1 + 2$, $c_n = 1 + 2 + 3$ e assim por diante. Se $A$ denota a área do triângulo e $A_n$ é a soma das áreas dos $c_n$ círculos, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

3. Considere a sequência:

$$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...$$

   Observe que essa sequência pode ser definida recursivamente pondo $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ para $n \geq 1$.

   a) Use indução matemática para verificar que $(a_n)$ é crescente e limitada superiomente por 2. Isto mostra que a sequência e convergente e tem limite $L \leq 2$.

   b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

4. Se $x_n \to x$ quando $n \to \infty$, então a sequência das médias aritméticas dos $x_n$ também converge a $x$, isto é,

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \to n.$$

Prove isto em duas etapas, como se segue.

a) comece supondo que $x = 0$, determine um inteiro positivo $n_0$ tal que $|x_n| < \epsilon/2$ para todo $n \geq n_0$ e utilize o fato de que para esses valores de $n$ temos

$$|y_n| \leq \frac{|x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0-1}|}{n} + \frac{|x_{n_0}| + \cdots + |x_n|}{n} < \frac{a}{n} + \frac{\epsilon}{2},$$

onde $a = |x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0-1}|$ é uma constante.

b) No caso geral, em que $x = 0$ não é admitido, utilize o fato de que, como $x_n - x \to 0$, podemos inferir da parte (a) que

$$x_n - x = \frac{(x_1 - x) + (x_2 - x) + \cdots + (x_n - x)}{n} \to 0.$$

5. Utilize o problema anterior para estudar as sequências:

(a) $\dfrac{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}{n}$

(b) $\dfrac{2 + 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{3}} + ... + 2^{\frac{1}{n}}}{n}$

(c) $\dfrac{1 + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}} + ... + n^{\frac{1}{n}}}{n}$

5) Seja $(a_n)$ uma sequência tal que toda subsequência contenha uma subsequência convergente para o mesmo limite $l$. Mostre que a sequência $(a_n)$ é convergente com limite $l$.

6) (Teorema dos intervalos encaixantes)

Seja $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$ uma sequência de intervalos fechados, cada um contendo o seguinte. Suponha que a sequência $(b_n - a_n)$ dos comprimentos de tais intervalos tende a 0. Demostre que exista um único ponto $C$ comum a todos esses intervalos.

7) Seja $(x_n)$ uma sequência de números reais tais que, para um certo $k$, com $0 < k < 1$, temos $|x_{n+1}| \leq k|x_n|$. Mostre que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

8) Seja $(x_n)$ uma sequência de números reais não nulos tais que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l$ com $|l| < 1$. Mostre que $(x_n)$ é convergente com limite zero. Observe que esse resultado é falso se $|l| = 1$. Dê um exemplo de sequência $(x_n)$ tais que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ e $x_n \to 1$ ou $x_n \to +\infty$