Lista 6

1)Verifique se B é base de V.

1.1) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $B = \{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\}$.

i) Dado $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in P_3(\mathbb{R})$. Então queremos encontrar $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tal que $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = \alpha_1(1) + \alpha_2(1+t) + \alpha_3(1-t^2) + \alpha_4(1-t-t^2-t^3) \Rightarrow \begin{cases} a_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ a_1 &= \alpha_2 - \alpha_4 \\ a_2 &= -\alpha_3 - \alpha_4 \\ a_3 &= -\alpha_4 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, temos $\alpha_4 = -a_3$, $\alpha_3 = a_2 - a_3$, $\alpha_2 = a_1 - a_3$ e $\alpha_1 = a_0 + a_3 - (a_2 - a_3) - (a_1 - a_3)$. Portanto B gera V.

ii) Seja uma combinação linear $\alpha_1 + \alpha_2(1+t) + \alpha_3(1-t^2) + \alpha_4(1-t-t^2-t^3) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Então $\begin{cases} 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ 0 &= \alpha_2 - \alpha_4 \\ 0 &= -\alpha_3 - \alpha_4 \\ 0 &= -\alpha_4 \end{cases}$

Logo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Portanto B é uma base. ■

2) Encontre uma base e a dimensão de W.

2.2) $W = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}); AX = X\}$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Demonstração: Dada uma matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W$. Então $AX = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = X$. Logo $\begin{cases} a+2c &= a \\ b+2d &= b \\ c &= c \\ d &= d \end{cases} \Rightarrow d = c = 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Portanto $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Assim $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ gera W. É claro que S é um conjunto L.I.

Portanto S é uma base de W e a dimensão de W é 2.

3) Determine uma base e dimensão para U, W, $W \cap U$ e $U + W$.

Caso 1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$.

Demonstração: (i)(base e dimensão de U) Dado um elemento $(x, y, z) \in U \Rightarrow (x, y, z) = (x, y, -x-y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$. Logo $S = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$

gera U. Agora $\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)=0 \Rightarrow (\alpha,\beta,-\alpha-\beta)=0 \Rightarrow \alpha=\beta=0$. Portanto S é uma base e a dimensão de U é 2.
(ii) (base e dimensão de W) Dado um elemento $(x,y,z)\in W \Rightarrow (x,y,z)=(x,y,0)=x(1,0,0)+y(0,1,0)$. Logo $S=\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ gera W. Agora $\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)=0 \Rightarrow (\alpha,\beta,0)=0 \Rightarrow \alpha=\beta=0$. Portanto S é uma base e a dimensão de W é 2.
(iii) (base e dimensão de $U\cap W$) Dado um elemento $(x,y,z)\in U\cap W \Rightarrow (x,y,z)=(x,-x,0)=x(1,-1,0)$. Logo $S=\{(1,-1,0)\}$ gera $U\cap W$. É claro que S é L.I. Portanto S é uma base e a dimensão de $U\cap W$ é 1.
(iv) (base e dimensão de $U+W$) Dado um elemento $(x,y,z)\in U+W \Rightarrow (x,y,z)=(a,b,-a-b)+(c,d,0)=(a+c,b+d,-a-b)=a(1,0,-1)+b(0,1,-1)+c(1,0,0)+d(0,1,0)$. Logo $S'=\{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ gera $U+W$. Mas $(0,1,-1)=(1,0,-1)-(1,0,0)+(0,1,0)$. Logo $S=\{(1,0,-1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ gera $U+W$. Além disso S é L.I. de fato, $\alpha(1,0,-1)+\beta(1,0,0)+\gamma(0,1,0)=0 \Rightarrow (\alpha+\beta,\gamma,-\alpha)=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$. Portanto S é uma base e a dimensão de $U+W$ é 3.

4) Determine as coordenas do vetor $u=(-1,8,5)\in\mathbb{R}^3$ em relação as seguintes bases:

4.1) Base canônica.
Demonstração: $u=(-1,8,5)=-1(1,0,0)+8(0,0,1)+5(0,0,1)$. Portanto as coordenadas de u na base canônica são $(-1,8,5)$.
4.2) $B=\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$
Demonstração: $u=(-1,8,5)=-1(1,1,1)+9(0,1,1)-3(0,0,1)$. Portanto as coordenadas de u na base B são $(-1,9,-3)$.

5) Determine as coordenas do vetor $p(t)=10+t^2+2t^3\in P_3(\mathbb{R})$ em relação as seguintes bases:

4.1) Base canônica.
Demonstração: $p(t)=10+t^2+2t^3=10(1)+0(t)+1(t^2)+2(t^3)$. Portanto as coordenadas de $p(t)$ na base canônica são $(10,0,1,2)$.
4.2) $B=\{1,1+t,1+t+t^2,1+t+t^2+t^3\}$.
Demonstração: $p(t)=10+t^2+2t^3=10(1)-1(1+t)-1(1+t+t^2)+2(1+t+t^2+t^3)$. Portanto as coordenadas de $p(t)$ na base B são $(10,-1,-1,2)$.

6) Determine as coordenas do vetor $p(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n\in P_n(\mathbb{R})$ em relação a base $B=\{1,t,\ldots,t^n\}$.

Demonstração: $p(t)=a_0(1)+a_1(t)+\ldots+a_n(t^n)$. Portanto as coordenadas de $p(t)$ na base B são $(a_0, \ldots, a_n)$. Além disso, temos

$$\begin{cases} p'(t) & = & a_1 + 2a^2t + \ldots + na^nt^{n-1} \\ p''(t) & = & 2a^2 + 3.2a_3t + \ldots + n(n-1)a^nt^{n-2} \\ & \vdots & \\ p^{(n-1)}(t) & = & (n-1)!a_{n-1} + n(n-1)\ldots 2a^nt \\ p^n(t) & = & (n)!a_n \end{cases}$$

Portanto $\frac{1}{i!}p^{(i)}(0) = a_i$ e $(a_0, \ldots, a_n) = (\frac{1}{0!}p^{(0)}(0), \ldots, \frac{1}{n!}p^{(n)}(0))$.