04 – Recursão

SCC201/501 - Introdução à Ciência de Computação II

Prof. Moacir Ponti Jr.

www.icmc.usp.br/~moacir

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – USP

2010/2

Sumário

1. Recursividade
   - Definições
   - Recursão e computação
2. Exemplos e Implementação
   - Exemplo: cálculo do fatorial
   - Implementação de Recursividade
   - Exemplo: sequência de Fibonacci
3. Questões importantes
   - Quando não usar recursividade
   - Recursão indireta
   - Recursão infinita
   - Ordem da chamada recursiva

Prévias: notícias e páginas interessantes a visitar

- Foi provado que qualquer posição do Cubo Mágico pode ser resolvida com 20 movimentos. http://www.reddit.com/tb/cz0ll

- “Martin e o Dragão“, série de três contos sobre recursão (Prof. Ruiter – UFAM),
  - http://www.dcc.ufam.edu.br/~ruiter/icc/martin0.html
  - http://www.dcc.ufam.edu.br/~ruiter/icc/martin1.html
  - http://www.dcc.ufam.edu.br/~ruiter/icc/martin2.html

- Uncyclopedia sobre recursão finita. http://uncyclopedia.wikia.com/wiki/Finite_recursion

Definições

- Em *matemática*, pode ser definida como: **o ato de definir um objeto (geralmente uma função), em termos do próprio objeto.**

- Em *computação*, ocorre quando: **um dos passos de um determinado algoritmo envolve a repetição desse mesmo algoritmo**

- Um procedimento que se utiliza da recursão é dito recursivo.
- Também é dito recursivo qualquer objeto que seja resultado de um procedimento recursivo.

Definições

- É possível, por meio de recursão, obter um objeto ou sequências infinitas a partir de um componente finito.

- O conjunto dos números naturais, por exemplo, pode ser definido formalmente (de maneira resumida), por:
  - Seja 0 um número natural. Cada número natural, n tem um sucessor $n + 1$, que é também um número natural.

Definições

Caso base

- Parte não recursiva, também chamada de âncora, ocorre quando a resposta para o problema é trivial.

Passo indutivo

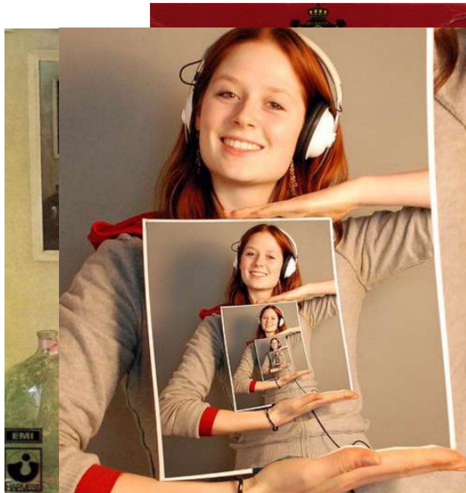
- Parte da definição que especifica como cada elemento (solução) é gerado a partir do precedente.

- A função fatorial $n!$ pode ser definida como, dado um número inteiro positivo n:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \text{ (caso base)}, \\ n \cdot (n-1)!, & \text{se } n > 0 \text{ (passo de indução)}. \end{cases} \quad (1)$$

Aplicação visual

- Efeito "Droste"



Definição de: **Recursão**

- Se você ainda não entendeu; ver "Recursão".

Recursion | Search

About 2,460,000 results (0.29 seconds) Advanced search

Everything
More

Any time
Past 2 days

All results
Related searches
Wonder wheel
Timeline

More search tools

Did you mean: ***Recursion***

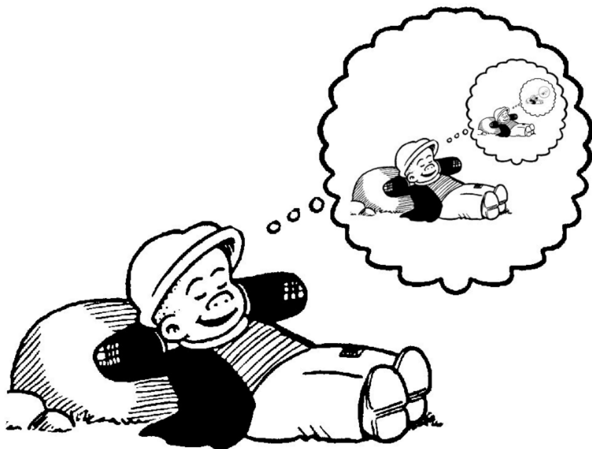
Recursion - Wikipedia, the free encyclopedia
Recursion, in mathematics and computer science, is a method of defining functions in which the function being defined is applied within its own definition; ...
en.wikipedia.org/wiki/**Recursion** - Cached - Similar

Recursion (computer science) - Wikipedia, the free encyclopedia
Recursion in computer science is a method where the solution to a problem depends on solutions to smaller instances of the same problem. ...
en.wikipedia.org/wiki/**Recursion**_(computer_science) - Cached - Similar
Show more results from en.wikipedia.org

Recursion -- from Wolfram MathWorld
A **recursive** process is one in which objects are defined in terms of other objects of the same type. Using some sort of recurrence relation, the entire class ...
mathworld.wolfram.com › ... › Algorithms › Recursion - Cached - Similar

recursion
Definition of **recursion**, possibly with links to more information and

Humor recursivo



Gramáticas de linguagens de programação

- Na especificação de gramáticas de linguagens de programação se utiliza recursão para modelar a estrutura de expressões e declarações.

```
<expr> ::= <numero>
         | (<expr> * <expr>)
         | (<expr> + <expr>)
```

- O exemplo acima mostra que a expressão pode ser um número, o produto de duas expressões ou a soma de duas expressões.
- A referência recursiva à `<expr>` permite expressões arbitrariamente complexas com mais de um produto ou soma em uma única expressão, como: `(5 * ((3 * 6) + 8))`
- Qual é o caso base? E o que ele representa?

Recursão e computação

Problemas com estrutura recursiva

- Propriedade: cada instância do problema contém uma instância menor do mesmo problema.

Resolução de problemas recursivos

- se a instância é pequena, resolva-a diretamente (caso base)
- senão
  1. reduza-a a uma instância menor do mesmo problema,
  2. aplique o método à instância menor, e
  3. volte à instância original.

Algoritmo recursivo

- O uso da estratégia acima produz um algoritmo recursivo que **é caracterizado por possuir uma chamada a si mesmo**.

Recursão e computação: as três regras

1 – Saber quando parar.

- qualquer função recursiva deve verificar se a jornada já terminou (caso base) antes da nova chamada recursiva.

2 – Decidir como fazer o primeiro passo

- pensar em como quebrar um problemas em subproblemas que possam ser resolvidos instantaneamente.

3 – Analisar a jornada de forma que possa ser dividida em jornadas menores

- encontrar uma maneira da função chamar a si mesma (recursivamente), passando por parâmetro um problema menor resultante da segunda regra.

Fonte: http://www.dcc.ufam.edu.br/~ruiter/icc/martin4.html

Exemplo: cálculo do fatorial

Função recursiva para cálculo do fatorial

```
unsigned long fatorial(int n)
{
   unsigned long resultado = 1; // caso base
   if (n > 1) {
      resultado = n * fatorial(n-1); // passo indutivo
   }
   return resultado;
}
```

- Na função acima, é possível ver que o caso base é tomado como sendo o padrão.
- A seguir, se $n > 1$, então não estamos no caso base e assim o resultado será o produto de n por $(n-1)!$.

Implementação de Recursividade

- A forma de um compilador implementar um procedimento recursivo é por meio de uma **pilha**.
- Nessa pilha são armazenados os dados usados em cada chamada de uma função que ainda não terminou de processar.

```
fatorial(4)
```

Implementação de Recursividade

- A forma de um compilador implementar um procedimento recursivo é por meio de uma **pilha**.
- Nessa pilha são armazenados os dados usados em cada chamada de uma função que ainda não terminou de processar.

```
fatorial(4)
[ 4 * fatorial(3) ]
```

Implementação de Recursividade

- A forma de um compilador implementar um procedimento recursivo é por meio de uma **pilha**.
- Nessa pilha são armazenados os dados usados em cada chamada de uma função que ainda não terminou de processar.

```
fatorial(4)
[ 4 * fatorial(3) ]
[ 4 * < 3 * fatorial(2) > ]
```

Implementação de Recursividade

- A forma de um compilador implementar um procedimento recursivo é por meio de uma **pilha**.
- Nessa pilha são armazenados os dados usados em cada chamada de uma função que ainda não terminou de processar.

```
fatorial(4)
[ 4 * fatorial(3) ]
[ 4 * < 3 * fatorial(2) > ]
[ 4 * < 3 * { 2 * fatorial (1) } > ]
```

Implementação de Recursividade

- A forma de um compilador implementar um procedimento recursivo é por meio de uma **pilha**.
- Nessa pilha são armazenados os dados usados em cada chamada de uma função que ainda não terminou de processar.

```
fatorial(4)
[ 4 * fatorial(3) ]
[ 4 * < 3 * fatorial(2) > ]
[ 4 * < 3 * { 2 * fatorial (1) } > ]
[ 4 * < 3 * { 2 * 1 } > ]
```

Implementação de Recursividade

- A forma de um compilador implementar um procedimento recursivo é por meio de uma **pilha**.
- Nessa pilha são armazenados os dados usados em cada chamada de uma função que ainda não terminou de processar.

```
fatorial(4)
[ 4 * fatorial(3) ]
[ 4 * < 3 * fatorial(2) > ]
[ 4 * < 3 * { 2 * fatorial (1) } > ]
[ 4 * < 3 * { 2 * 1 } > ]
[ 4 * < 3 * 2 > ]
```

Implementação de Recursividade

- A forma de um compilador implementar um procedimento recursivo é por meio de uma **pilha**.
- Nessa pilha são armazenados os dados usados em cada chamada de uma função que ainda não terminou de processar.

```
fatorial(4)
[ 4 * fatorial(3) ]
[ 4 * < 3 * fatorial(2) > ]
[ 4 * < 3 * { 2 * fatorial (1) } > ]
[ 4 * < 3 * { 2 * 1 } > ]
[ 4 * < 3 * 2 > ]
[ 4 * 6 ]
```

- A forma de um compilador implementar um procedimento recursivo é por meio de uma **pilha**.
- Nessa pilha são armazenados os dados usados em cada chamada de uma função que ainda não terminou de processar.

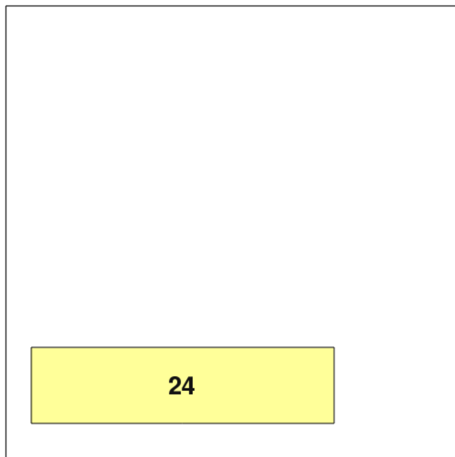
```
fatorial(4)
[ 4 * fatorial(3) ]
[ 4 * < 3 * fatorial(2) > ]
[ 4 * < 3 * { 2 * fatorial (1) } > ]
[ 4 * < 3 * { 2 * 1 } > ]
[ 4 * < 3 * 2 > ]
[ 4 * 6 ]
[ 24 ]
```

Implementação de Recursividade

- A função começa a execução do seu primeiro comando cada vez que é chamada
- **Novas e distintas** cópias dos parâmetros passados por valor e variáveis locais são criadas
- A posição que chama a função é colocada em estado de espera — o nível gerado recursivamente é executado

```
fatorial(4)
[ 4 * fatorial(3) ]
[ 4 * < 3 * fatorial(2) > ]
[ 4 * < 3 * { 2 * fatorial (1) } > ]
[ 4 * < 3 * { 2 * 1 } > ]
[ 4 * < 3 * 2 > ]
[ 4 * 6 ]
[ 24 ]
```

Implementação de Recursividade



Sequência de Fibonacci

- Sequência numérica obtida de forma recursiva:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 1, & \text{se } n = 1, \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases} \quad (2)$$

- Inicialmente relacionado à velocidade de reprodução de coelhos e observado como sendo o modelo de muitos fenômenos biológicos, possui inúmeras aplicações na computação, matemática, teoria dos jogos, artes e música.
- Os primeiros dez termos da sequência são:
  0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

Sequência de Fibonacci

- Um uso interessante é na conversão de milhas para quilômetros.
  - Para saber converter 5 mil. em km. aproximadamente, olha-se para o número seguinte ao número de Fibonacci correspondendo ao número de milhas: 5 mil. são aproximadamente 8 km.

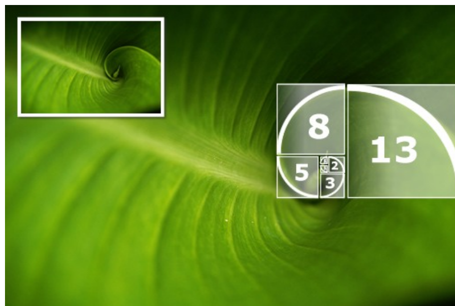


Figura: A evolução da espiral da folha da bromélia

Sequência de Fibonacci

- Uma função que calcule o número de Fibonacci para qualquer valor de n pode ser construída diretamente usando uma estratégia recursiva:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 1, & \text{se } n = 1, \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases} \tag{3}$$

```
unsigned int Fib(unsigned int n)
{
   if (n<=1) return n; // caso base
   else
      return (Fib(n-1) + Fib(n-2));  // passo indutivo
}
```

Sequência de Fibonacci

- Para valores de entrada pequenos, o programa é rápido. Já para $n > 40$ o computador demora um certo tempo para processar.
- Vamos inserir mensagens de monitoramento na função para verificar.

```
unsigned int Fib(unsigned int n)
{
   printf("> Entrando em Fib(%d)\n",n);
   unsigned int F;

   if (n<=1) F = n;
   else
      F = (Fib(n-1) + Fib(n-2));

   printf("<< Saindo de Fib(%d), retorno=%d\n", n, F);
   return F;
}
```

Sequência de Fibonacci

- A saída do monitoramento, para $n = 4$ é:

```
> Entrando em Fib(4)
> Entrando em Fib(3)
> Entrando em Fib(2)
> Entrando em Fib(1)
<< Saindo de Fib(1), retorno=1
> Entrando em Fib(0)
<< Saindo de Fib(0), retorno=0
<< Saindo de Fib(2), retorno=1
> Entrando em Fib(1)
<< Saindo de Fib(1), retorno=1
<< Saindo de Fib(3), retorno=2
> Entrando em Fib(2)
> Entrando em Fib(1)
<< Saindo de Fib(1), retorno=1
> Entrando em Fib(0)
<< Saindo de Fib(0), retorno=0
<< Saindo de Fib(2), retorno=1
<< Saindo de Fib(4), retorno=3
```

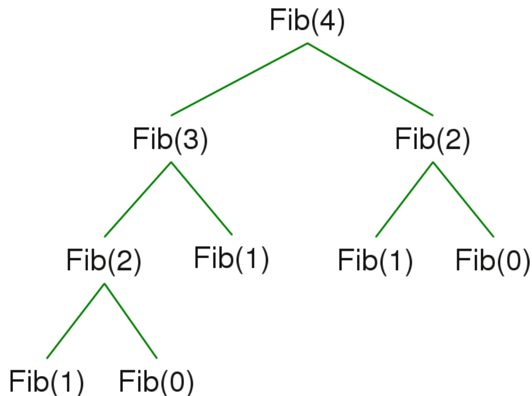


Figura: A árvore de chamadas recursivas à função `Fib()`

Sequência de Fibonacci: algoritmo iterativo

```
unsigned int Fib_iter(unsigned int n)
{
   unsigned int k, i = 1, F = 0;

   for (k = 1; k <= n; k++)
   {
       F += i;
       i = F - i;
   }
   return F;
}
```

Quando não usar recursividade

- No exemplo anterior, a primeira implementação seguia a estrutura “natural” da sequência de Fibonacci. Mas, como vimos, nem sempre a estratégia recursiva é a melhor.
- Os problemas para os quais algoritmos recursivos devem ser evitados são ditos terem **recursividade de cauda**, e devem substituídos por uma versão iterativa.
  - nesse tipo de função, a chamada recursiva é a última instrução a ser executada.
- Há, no entanto, problemas para os quais é difícil ou impossível implementar uma solução não recursiva.

Recursão indireta

- Funções podem ser recursivas indiretamente, fazendo isto através de outras funções: assim, `P` pode chamar `Q` que chama `R` e assim por diante, até que `P` seja novamente invocada.
- Um exemplo é a análise de expressões (como no exemplo anterior): um analisador gramatical para cada tipo de sub-expressão, uma expressão "3 + (2 * (4 + 4))"é a resolvida da seguinte forma:
  1. A função que processa expressões "+"chama uma segunda função que processa expressões "*",
  2. A função de multiplicação, por sua vez, chama novamente a função de soma.

Recursão infinita

- Repetição infinita causada por chamada recursiva.
- Ocorre quando o caso base não é definido (ou não é definido corretamente).
- Na prática, o programa não irá executar infinitamente, pois em algum momento alcançará o limite da **pilha**, e haverá um estouro de memória, causando um erro.
- Exemplo:

```
long int fatorial(int n)
{
   return n * fatorial(n-1);
}
```

Ordem da chamada recursiva

```
void recursiva1(int num){
   if (num <= 4) {
      printf("%d\n", num);
      recursiva1(num+1);
   }
}
```

```
  recursiva1(1)
  printf(1)
      recursiva1(1+1)
      printf(2)
         recursiva1(2+1)
         printf(3)
            recursiva1(3+1)
            printf(4)
```

```
void recursiva2(int num){
   if (num <= 4) {
      recursiva1(num+1);
      printf("%d\n", num);
   }
}
```

```
  recursiva2(1)
      recursiva2(1+1)
         recursiva2(2+1)
            recursiva2(3+1)
            printf(4)
         printf(3)
      printf(2)
  printf(1)
```

Exercícios

(1) Implemente as versões recursiva e iterativa da função para obter números de Fibonacci. Utilize a biblioteca `time.h` para medir e observar o tempo necessário para calcular $n = 15, 30, 45$ e 60, utilizando as duas versões.

(2) Implemente uma função recursiva para encontrar o maior elemento em um arranjo. *Dica*: encontre o maior elemento no subconjunto que contém todos, exceto o último elemento, então compare aquele máximo com o valor do último elemento.

(3) Implemente uma função que exibe todas as *substrings* de uma *string*. Dica: primeiro enumere todos os *substrings* que começam com o primeiro caractere. Existem n deles se o string tem tamanho n. Então, enumere as *substrings* da *string* após remover o primeiro caractere. Exemplo: substrings de `rum`:

```
r, ru, rum, u, um, m
```

Bibliografia

- ZIVIANI, N. **Projeto de algoritmos**: com implementações em Pascal e C (Seção 2.2). 2.ed. Thomson, 2004.
- CORMEN, T.H. et al. **Algoritmos: Teoria e Prática** (Seção 2.3.1). Campus. 2002.
- FEOFILOFF, P. **Recursão e algoritmos recursivos**. Disponível em: `http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html`.
- CALDAS, R.B.. **Introdução a Computação**. Disponível em: `http://www.dcc.ufam.edu.br/~ruiter/icc/`.