

ICMC – USP
SME 5779 – Inferência Estatística – 2013/1
4ª lista de exercícios

1. Considere X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de cada uma das distribuições abaixo. Apresente os respectivos estimadores de máxima verossimilhança.
 - (a) $\text{gama}(\alpha, \beta)$, α conhecido, (b) $\text{gama}(\alpha, \beta)$, β conhecido, (c) $\text{gama}(\alpha, \beta)$ e (d) $\text{beta}(\alpha, \beta)$.
2. Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{uniforme}([- \theta, \theta])$, $\theta > 0$. Apresente um estimador de θ pelo método de máxima verossimilhança.
3. Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{uniforme}([\theta - 1/2, \theta + 1/2])$, $\theta \in \mathbb{R}$. Apresente um estimador de θ pelo método de máxima verossimilhança. Existe um único estimador?
4. Sendo $X_1 \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$, prove que não existem estimadores de máxima verossimilhança de μ e σ^2 .
5. Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} f(\cdot; \theta)$, em que $f(x; \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$, $0 < \theta \leq 1/2$. Apresente (e comente) estimadores de θ utilizando os métodos dos momentos e de máxima verossimilhança.
6. Suponha que tempos de falha de um componente (X , em meses) seguem distribuição exponencial(λ). Foi coletada uma amostra aleatória X_1, \dots, X_n . (a) Apresente dois estimadores de λ pelo método dos momentos. (b) Discuta a estimação de $P_\lambda(X_1 \geq 1)$ por máxima verossimilhança.
7. Sejam $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} f(\cdot; \boldsymbol{\theta})$, em que $f(x; \boldsymbol{\theta}) = \sigma^{-1} \exp\{-(x-\mu)/\sigma\} I_{[\mu, \infty)}(x)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)'$. (a) Encontre estimadores de máxima verossimilhança de μ e σ . (b) Proponha um estimador para $P_{\boldsymbol{\theta}}(X_1 \geq t)$, $t > \mu$.
8. Sejam $X_1, \dots, X_m \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(\mu_X, \sigma^2)$ e $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(\mu_Y, \sigma^2)$ amostras independentes. Encontre estimadores de máxima verossimilhança de μ_X , μ_Y e σ^2 .
9. Considere $X_i \stackrel{\text{indep.}}{\sim} \text{normal}(\mu, \sigma^2 + \kappa_i)$, $\kappa_i > 0$, κ_i conhecida, $i = 1, \dots, n$.
 - (a) Proponha estimadores de μ e σ^2 pelos métodos dos momentos e de máxima verossimilhança.
 - (b) Aplique os resultados do item anterior aos dados da amostra

$$\boldsymbol{x} = (4, 2; 5, 7; 5, 3; 9, 6; 14, 0; 7, 1; 14, 9; 9, 1; 4, 6; 1, 3; 8, 4; 4, 1; 6, 1; 3, 0; 9, 9; 4, 1; 9, 7; 12, 4; 11, 4; 4, 9)'$$
 sendo que

$$\boldsymbol{\kappa} = (2, 7; 1, 5; 3, 6; 2, 9; 0, 9; 3, 1; 4, 7; 3, 8; 2, 1; 2, 1; 3, 0; 4, 2; 5, 9; 3, 6; 3, 1; 2, 5; 3, 2; 0, 9; 4, 3; 2, 9)'$$
10. Uma amostra aleatória é obtida de uma distribuição $\text{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$, mas os valores nulos não são registrados. Dizemos que a distribuição é truncada na origem ou em 0. (a) Discuta a estimação de θ por máxima verossimilhança. (b) Com base nas observações $\boldsymbol{x} = (5, 7, 2, 6, 3, 2, 4, 4, 1, 5)'$, apresente uma estimativa para θ .