Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência


# Sobre o Critério de Sassenfeld

**Resumo:** Neste trabalho demonstraremos o Critério de Sassenfeld que é um importante resultado sobre a convergência do método de Gauss-Seidel. Também daremos uma aplicação usando este resultado.

## Sumário



## 1. Introdução

Em Análise Numérica usamos os métodos iterativos para resolver sistemas de equações lineares de grande porte. Um desses métodos é o método de Gauss-Seidel. Nesse trabalho demonstraremos o Critério de Sassenfeld, que nos dá condições suficientes para a convergência desse método, independente da aproximação inicial $x^{(0)}$ atribuída.

## 2. Método iterativo de Gauss-Seidel

No método de Gauss-Seidel, um sistema de equações lineares $Ax = b$ é escrito de forma equivalente $x = Cx + g$ por separação da diagonal. Seja $x^{(0)}$ uma aproximação inicial, pelo processo iterativo queremos calcular $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots,$ por:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}). \end{cases}$$

Portanto, no método de Gauss-Seidel, quando calcularmos $x_j^{(k+1)}$ usamos todos os valores de $x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados e os valores $x_{j+1}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ restantes.

# 3. Critérios de Parada

O processo iterativo Gauss-Seidel é repetido várias vezes até que o vetor $x^{(k)}$ esteja muito próximo do vetor $x^{(k-1)}$. Considerando a norma de vetores, e dada uma precisão $\epsilon$, o vetor $x^{(k)}$ será escolhido como uma solução aproximada da solução exata se:

$(i)$ $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \epsilon$ (erro absoluto),

$(ii)$ $\dfrac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|} < \epsilon$ (erro relativo).

Os critérios de parada acima são os mais utilizados.

# 4. Resultado principal

**Teorema 4..1 (Critério de Sassenfeld)** *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem $n$. Sejam $\beta_i$, $i = 1, 2, ..., n$ dados por:*

$$\beta_1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|},$$

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|\beta_j}{|a_{ii}|} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}.$$

*Se* $\beta = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{\beta_i\} < 1$, *então o método de Gauss-Seidel gera uma seqüência de vetores* $(x^{(k)})$ *convergente qualquer que seja a aproximação inicial* $x^{(0)}$.

*Além disso, quanto menor for* $\beta$ *mais rápida será a convergência.*

**Demonstração:**

Seja $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a solução exata do sistema de equações lineares $Ax = b$ e seja $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ a $k$-ésima aproximação de $x$ obtida pelo método de Gauss-Seidel.

Queremos uma condição que nos garanta que $x^{(k)} \longrightarrow x$ quando $k \longrightarrow \infty$. Ou seja, que

$$\lim_{k\to\infty} e_i^{(k)} = 0, \text{ para } i = 1, \ldots, n, \text{ onde } e_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_i.$$

Agora, aplicando Gauss-Seidel temos

$$\begin{cases} e_1^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}e_2^{(k)} + a_{13}e_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}e_n^{(k)}) \\ e_2^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{22}}(a_{21}e_1^{(k+1)} + a_{23}e_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}e_n^{(k)}) \\ \vdots \\ e_n^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{nn}}(a_{n1}e_1^{(k+1)} + a_{n2}e_2^{(k)} + \cdots + a_{nn-1}e_{n-1}^{(k+1)}). \end{cases}$$

Denotaremos de $E^{(k)} = \max\limits_{1\leq i\leq n} |e_i^{(k)}|$, e sejam

$$\beta_1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|},$$

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|\beta_j}{|a_{ii}|} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}, \text{ para } i = 2, 3, \ldots, n.$$

Mostraremos por indução que $E^{(k+1)} \leq \beta E^{(k)}$ onde $\beta = \max_{1\leq i\leq n}\{\beta_i\}$.

Para $i = 1$, temos

$$\begin{aligned} |e_1^{(k+1)}| &\leq \frac{1}{|a_{11}|}(|a_{12}||e_2^k| + |a_{13}||e_3^{(k)}| + \cdots + |a_{1n}||e_n^{(k)}|) \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{|a_{11}|}(|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|)}_{=\beta_1} E^{(k)}. \end{aligned}$$

Então, $|e_1^{(k+1)}| \leq \beta_1 E^{(k)} \leq \beta E^{(k)}$.

Suponhamos por indução que

$$|e_2^{(k+1)}| \leq \beta_2 E^{(k)}$$

$$|e_3^{(k+1)}| \leq \beta_3 E^{(k)}$$

$$\vdots$$

$$|e_{i-1}^{(k+1)}| \leq \beta_{i-1} E^{(k)}, \text{ tal que } i \leq n$$

e mostraremos que $|e_i^{(k+1)}| \leq \beta_i \max_{1\leq j\leq n} |e_j^{(k)}|$

De fato, temos que

$$|e_i^{(k+1)}| \leq \frac{1}{|a_{ii}|}(|a_{i1}||e_1^{(k+1)}|+\cdots+|a_{i,i-1}||e_{i-1}^{(k+1)}|)+\frac{1}{|a_{ii}|}(|a_{i,i+1}||e_{i+1}^{(k)}|+\cdots+|a_{in}||e_n^{(k)}|)$$

$$|e_i^{(k+1)}| \leq \underbrace{\frac{1}{|a_{ii}|}(|a_{i1}|\beta_1 + |a_{i2}|\beta_2 + \ldots |a_{i,i-1}|\beta_{i-1} + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{in}|)}_{\beta_i} E^{(k)},$$

ou seja,

$$|e_i^{(k+1)}| \leq \beta_i E^{(k)} \leq \beta E^{(k)}, \quad \forall i, 1 \leq i \leq n.$$

Portanto,

$$E^{(k+1)} = \max_{1\leq i\leq n} |e_i^{(k+1)}| \leq \beta \max_{1\leq j\leq n} |e_j^{(k)}| = \beta E^{(k)}. \tag{4.1}$$

Assim, basta que $\beta < 1$ para que tenhamos $E^{(k+1)} < E^{(k)}$. Aplicando (1) seguidas vezes, obtemos

$$E^{(k)} \leq \beta E^{(k-1)} \leq \beta(\beta E^{(k-2)}) \leq \cdots \leq \beta^k E^{(0)},$$

ou seja,

$$E^{(k)} \leq \beta^k E^{(0)}.$$

Logo,

$$\lim_{k\to\infty} \beta^k E^{(0)} = 0.$$

Portanto, se $\beta < 1$ então $x^{(k)} \longrightarrow x$, independendo da aproximação inicial escolhida. $\square$

• **Exemplo 4..2** *Seja o sistema linear*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_3 = 3 \end{cases} \tag{4.2}$$

*temos que a matriz ampliada de* (2) *é*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

*com esta disposição de linhas e colunas temos que a matriz acima não satisfaz o Critério de Sassenfeld. Mas trocando a linha* 1 *com a linha* 3 *e, a partir daí, trocamos a coluna* 1 *com a coluna* 3, *temos*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

*Desta forma,*

$\beta_1 = 1/3,$

$\beta_2 = [(1)(1/3) + 0]/1 = 1/3,$

$\beta_3 = [(3)(1/3) + (1)(1/3)]/2 = 2/3.$

*Portanto,* $\beta = \max_{1\leq i\leq 3} \beta_i = 2/3 < 1$, *então vale o Critério de Sassenfeld e temos garantia de convergência.*

## Referências

[1] Notas de Aula - Doherty Andrade

[2] Márcia A. G. Ruggiero, Vera L. R. Lopes *Cálculo numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. McGraw-Hill, 132-137, (1988).