ICMC – USP

SME 5779 – Inferência Estatística – 2013/1

1ª lista de exercícios

1. Calcule os seguintes valores :
   (a) $\Gamma(7)$
   (b) $\Gamma(\frac{10}{2})$
   (c) $B(2, \frac{3}{2})$, $B(8,6)$, $B(6,8)$
   (d) $\int_0^\infty e^{-3x} x^4 dx$
   (e) $\int_0^1 x^5 (1-x)^9 dx$
   (f) $\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \sin^6\theta d\theta$

2. Prove que $B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx$.

3. Prove que $B(s,t) = B(t,s)$.

4. Calcule a moda, o coeficiente de variação e o coeficiente de assimetria da distribuição gama com parâmetros α e λ.

5. Calcule a média e a variância da distribuição $\chi^2(r)$.

6. Calcule a média e a variância da distribuição beta com parâmetros r e s.

7. Se a variável aleatória X possui distribuição beta, $E[1/X]$ pode ser igual a 1 ?

8. Seja X uma variável aleatória $B(r,s)$ definida no intervalo $(0,1)$.
   (a) Determine a densidade de uma variável aletória beta definida em um intervalo (a,b), $b > a$. [*Sugestão:* Defina $Y = a + (b-a)X$.]
   (b) Calcule a esperança e a variância de Y.

9. Seja X uma variável aleatória com distribuição $B(r,s)$. Determine a distribuição de $1-X$.

10. Se X é uma variável aleatória com distribuição uniforme em $(0,1)$, determine a distribuição de $1/X$. Se existir, calcule a esperança de $1/X$.

11. Se X é uma variável aleatória com distribuição uniforme em $(-\pi/2, \pi/2)$, determine a distribuição de $Y = \tan(X)$.

12. Se X é uma variável aleatória com distribuição normal padrão, determine a distribuição de $Y = e^X$. Calcule a média e a variância de Y.

13. Seja X_1 , X_2 , $\cdots$, X_N uma amostra aleatória da densidade $f_X(x) = x^{-2} I_{(1,\infty)}(x)$. Seja $Y = \min[X_1, X_2, \cdots, X_N]$. Se existir, calcule $E[X_1]$. Se existir, calcule $E[Y]$.

14. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes possuindo distribuição exponencial com parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente, calcule $E[\max[X,Y]]$.

15. Se uma variável aleatória X segue distribuição t de Student com k graus de liberdade, determine a distribuição de X^2.

16. Se uma variável aleatória X segue distribuição Weibull(a,θ), determine a distribuição de θX^a.

17. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Poisson}(\lambda)$, qual a distribuição de X_1 dado $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$?

18. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_{100} \overset{\text{iid}}{\sim} \chi^2_{50}$. Calcule $P(49 < \overline{X} < 51)$.

19. Se $X_i \overset{\text{indep.}}{\sim} \mathsf{gama}(r_i, \lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, qual a distribuição de $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$?