7. Medidas de concentração e desigualdade

2010

Exemplo 1. Variável: renda do trabalho de pessoas.

Valores: $x_1,...,x_n$. Renda total: $T = x_1 + ... + x_n$.

(a) A renda total pode estar igualmente repartida entre as n pessoas, cada uma com renda = T / n $(= \bar{x})$.

(b) A renda total pode ser de uma única pessoa:
$x_1 = T$, $x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$.

Estas duas situações são extremas. Em (b): concentração máxima.

É mais comum encontrarmos situações intermediárias.

Obs. Concentração está relacionada com variabilidade.

Exemplo 2. Variável: altura de pessoas.

Valores: $x_1,...,x_n$. Altura total: $T = x_1 + ... + x_n$.

$x_1 = T$, $x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$ não faz sentido.

7.1. A curva de Lorenz

Valores ordenados: $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)}$. Total: $T = x_{(1)} + x_{(2)} + ... + x_{(n)}$.

Proporção acumulada de posições até a i-ésima posição ($p_0 = 0$):

$p_i = i / n$. $p_1 = 1 / n$, $p_2 = 2 / n$, ..., $p_{n-1} = (n - 1) / n = 1 - 1 / n$, $p_n = n / n = 1$.

Proporção acumulada de valores até a i-ésima posição ($q_0 = 0$):

$q_i = (x_{(1)} + x_{(2)} + ... + x_{(i)}) / T$ ($q_n = T / T = 1$).

Obs. Se $x_i \geq 0$, então $p_i \geq q_i$, $i = 1,...,n$.

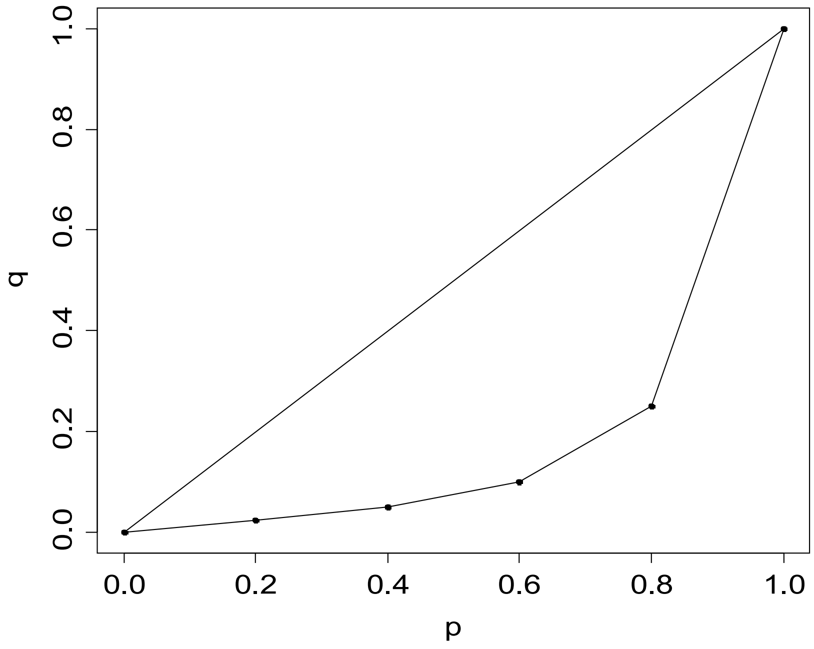
O gráfico formado pela união dos pontos $(0, 0)$, (p_1, q_1), (p_2, q_2), ..., (p_n, q_n) é chamado de curva de Lorenz ($p_n = q_n = 1$).

O segmento de reta unindo $(0, 0)$ e $(1, 1)$ também é incluído.

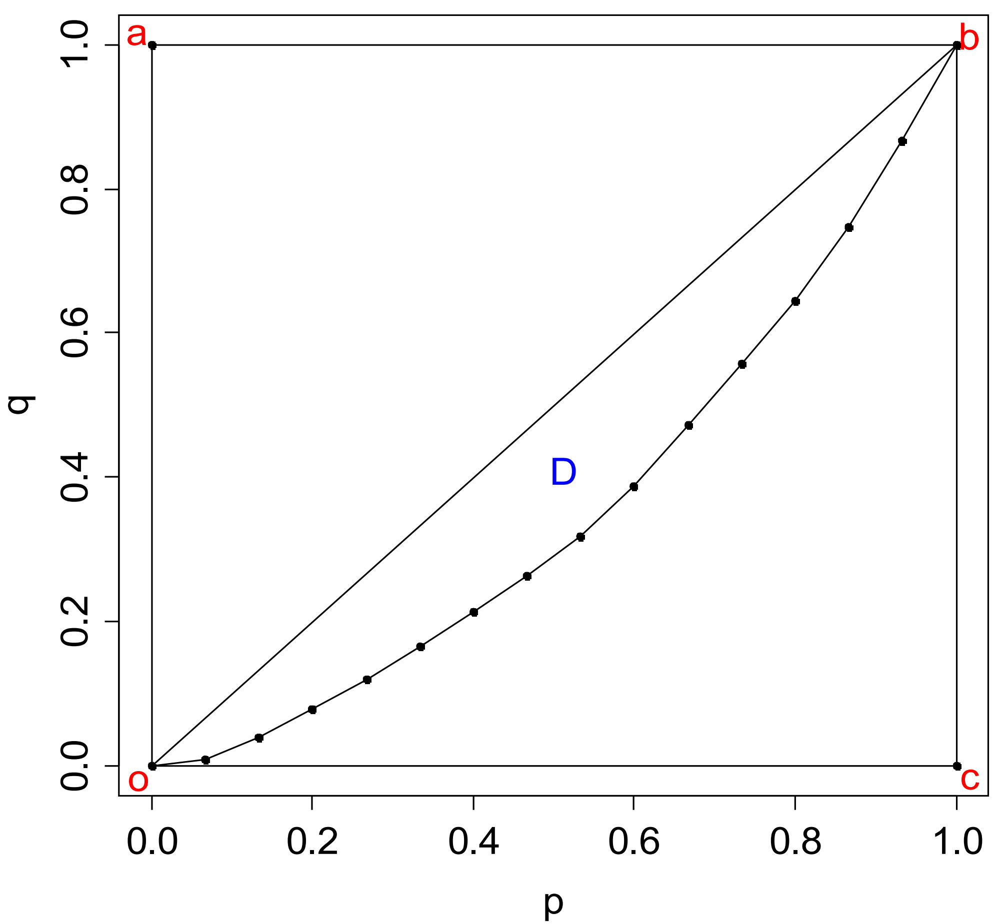
Exemplo

Dados ordenados: 1, 1, 2, 6, 30 ($n = 5$, $T = 40$ e média = $T / n = 8$).

i	x_i	p_i	q_i
1	1	1 / 5 = 0,2	1 / 40 = 0,025
2	1	2 / 5 = 0,4	(1 + 1) / 40 = 0,05
3	2	3 / 5 = 0,6	(1 + 1 + 2) / 40 = 0,1
4	6	4 / 5 = 0,8	(1 + 1 + 2 + 6) / 40 = 0,25
5	30	5 / 5 = 1	(1 + 1 + 2 + 6 + 30) / 40 = 1



Área de desigualdade



Área compreendida entre ob e a curva de Lorenz: área de desigualdade (D).

(a) $x_{(1)} = x_{(2)} = ... = x_{(n)} = T / n$: proporções de posições = proporções acumuladas de valores ($q_i = p_i$, i = 1,...,n).

$\Rightarrow$ curva de Lorenz = segmento ob (linha da igualdade perfeita).

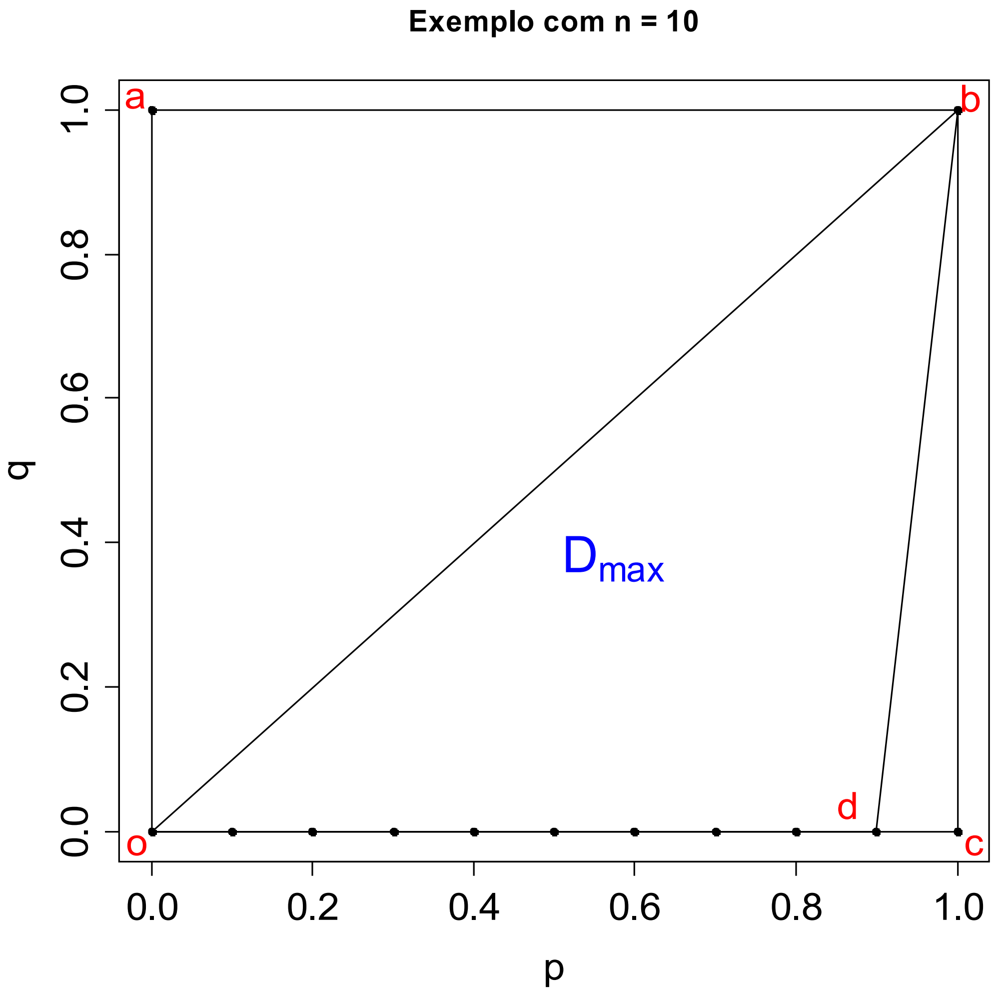
(b) $x_{(1)} = x_{(2)} = ... = x_{(n-1)} = 0$ e $x_{(n)} = T$:

curva de Lorenz é formada pelos pontos (0, 0), (1 – 1 / n, 0) e (1, 1): curva da desigualdade perfeita.

Quando $n \to \infty$: curva da desigualdade perfeita coincide com ocb.

Quanto mais a curva de Lorenz estiver afastada de ob, maior o grau de desigualdade.

7.2. Índice de Gini



Curva da desigualdade perfeita: odb.

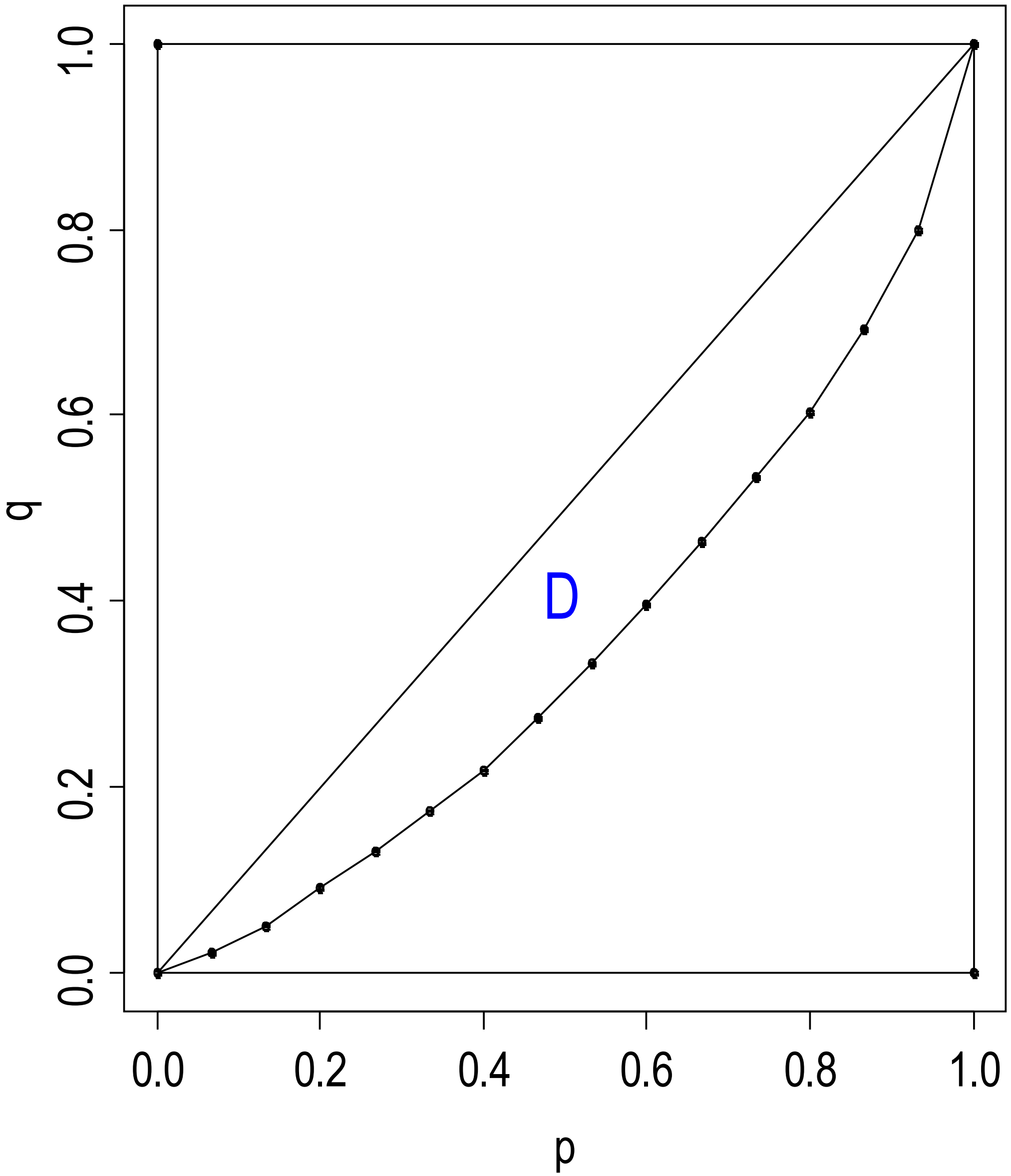
Como a área do triângulo obc = ½, temos que $0 \leq D < ½$.

Valor máximo de D (desigualdade perfeita):

$$D_{\max} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$D_{max} \to ½$ quando $n \to \infty$ ($d \to c$).

max $D_{max} = ½$.



Proposto por C. Gini em 1914.

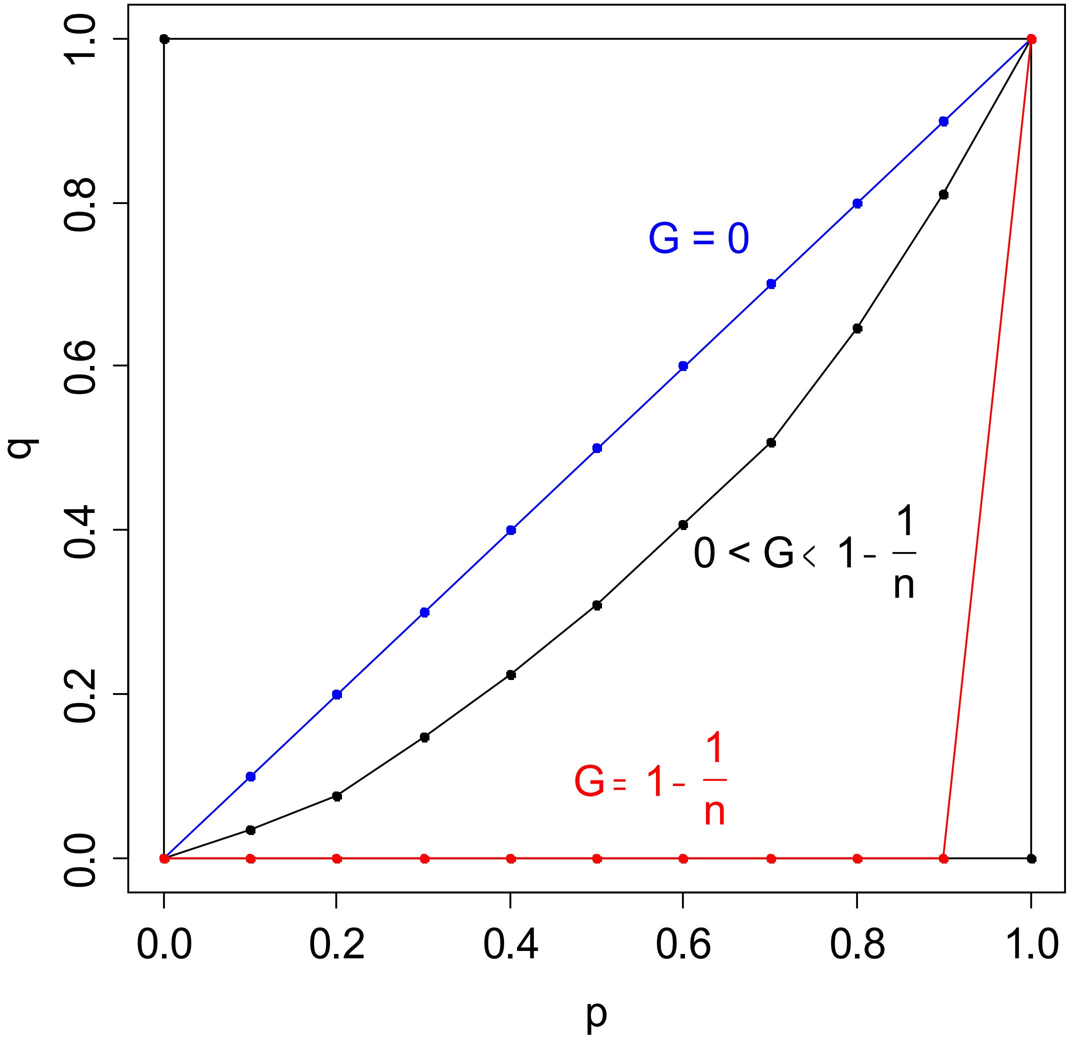
G = D / max D_{max} = D / ½ = 2 D.

Propriedades. (a) $0 \leq G < 1$ e (b) $0 \leq G \leq 1 - 1/n$.

Igualdade perfeita: G = 0.

Desigualdade perfeita: G = 1 – 1 / n (→ 1 quando n → ∞).

7.2. Índice de Gini



Valores ordenados:

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$.

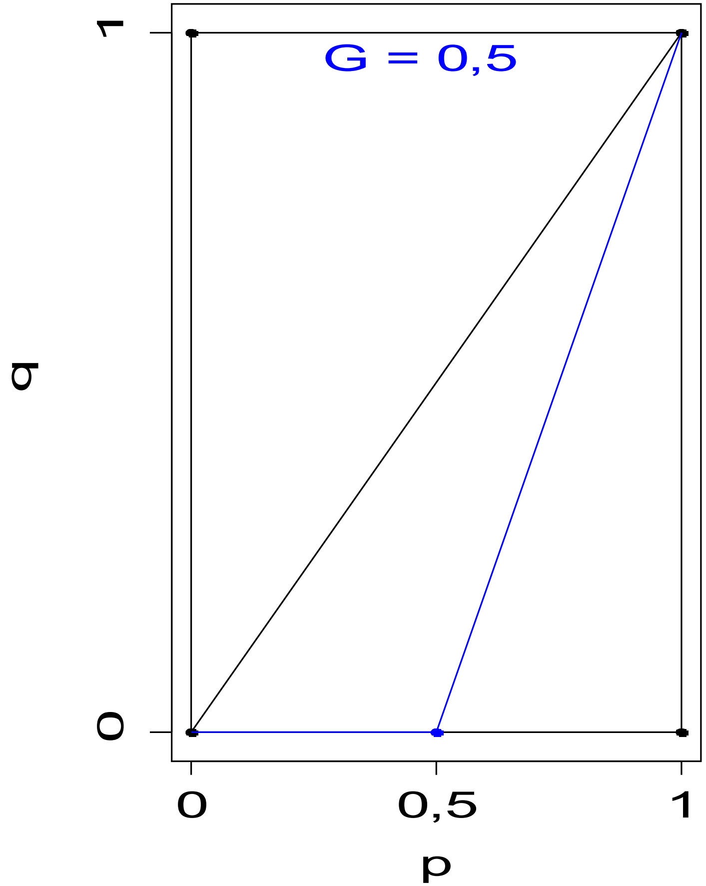
Como calcular G?

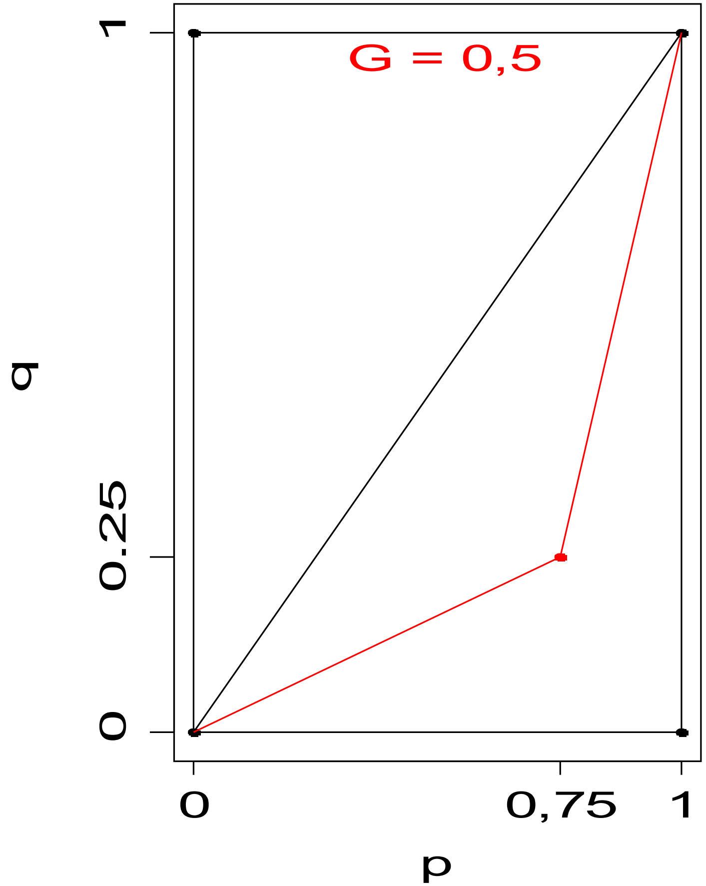
$$G = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(q_i + q_{i-1}),$$

sendo que $q_0 = 0$ e

$$q_i = \frac{1}{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{i} x_{(j)}.$$

Obs. (a) Diferentes curvas de Lorenz podem gerar o mesmo valor de G.

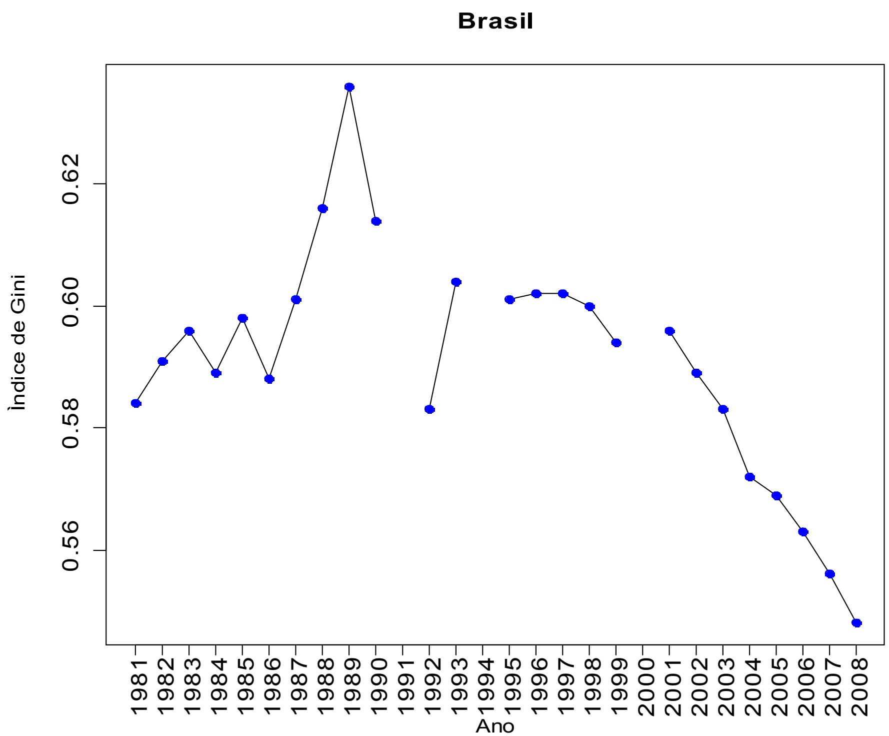


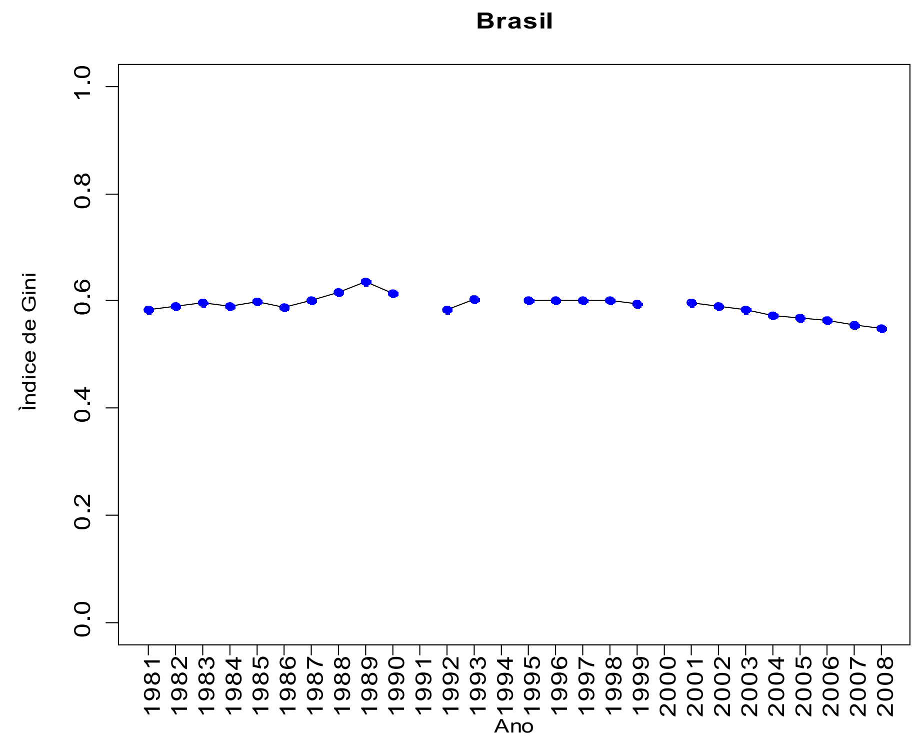


(b) G mede apenas desigualdade. Por exemplo, diferentes países podem ter valores de G semelhantes e diferentes níveis de riqueza.

7.2. Índice de Gini

Mede o grau de desigualdade existente na distribuição de indivíduos segundo a renda domiciliar *per capita*. Seu valor varia de 0, quando não há desigualdade (a renda de todos os indivíduos tem o mesmo valor), a 1, quando a desigualdade é máxima (apenas um um indivíduo detém toda a renda da sociedade e a renda de todos os outros indivíduos é nula). Fonte: http://www.pnud.org.br/popup/pop.php?id_pop=97.

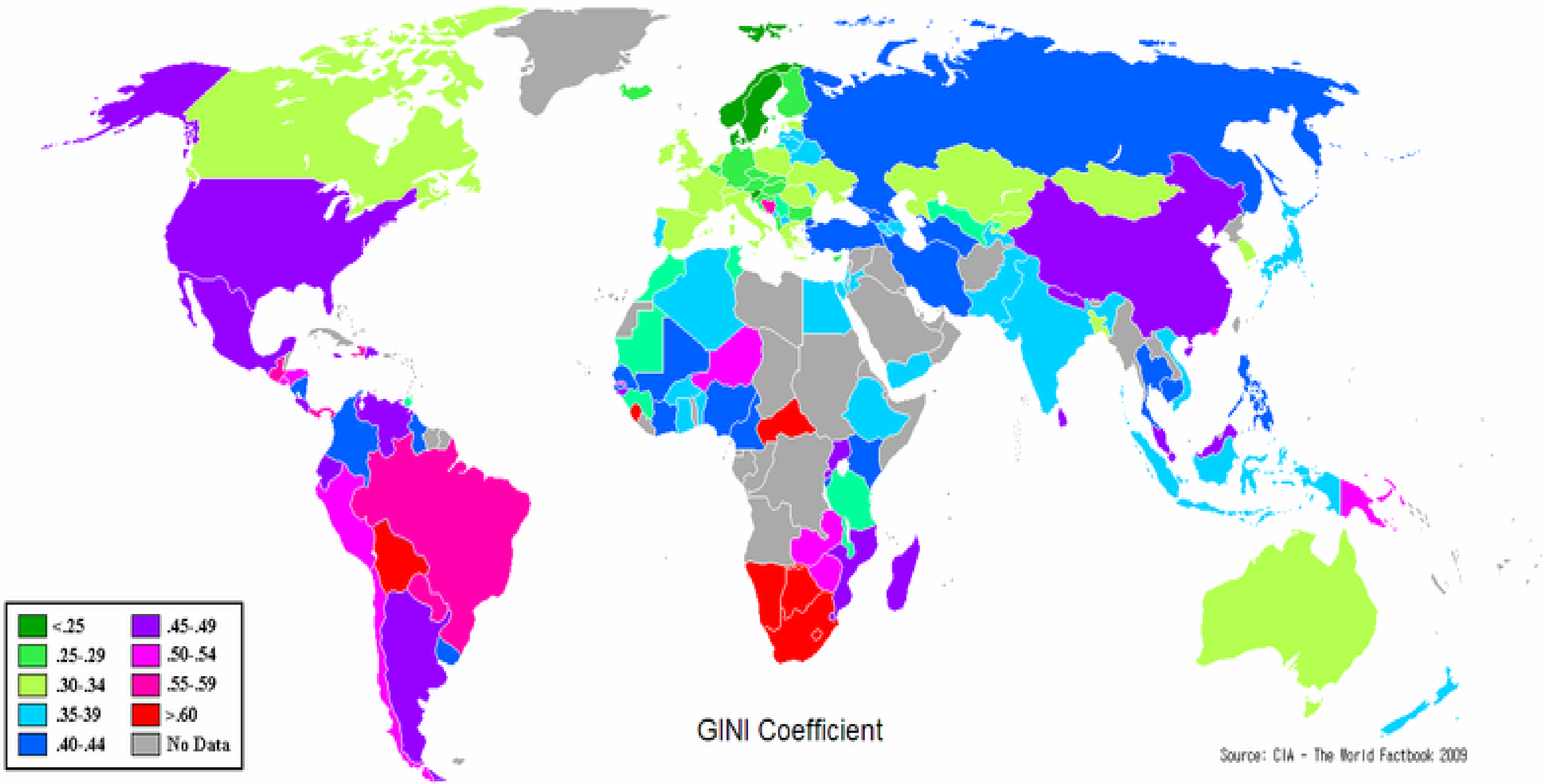




Redução importante nos últimos anos.

Pouca variação.

7.2. Índice de Gini



Gini Coefficient World CIA Report 2009.

Obs. Exemplo de um cartograma.

Diferença média. Medida de dispersão dada por

$$\bar{d} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | x_i - x_j |.$$

Diferenças ($n = 5$):

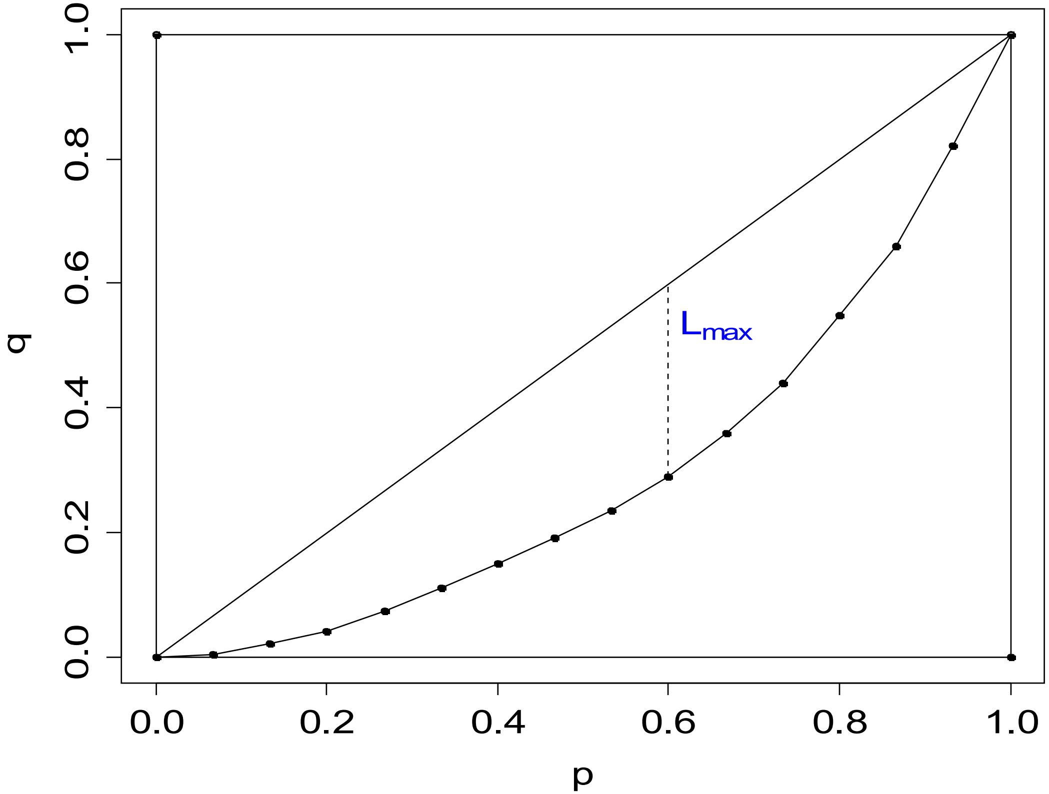
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$x_1 - x_1 = 0$	$x_1 - x_2$	$x_1 - x_3$	$x_1 - x_4$	$x_1 - x_5$
x_2	$x_2 - x_1$	$x_2 - x_2 = 0$	$x_2 - x_3$	$x_2 - x_4$	$x_2 - x_5$
x_3	$x_3 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_3 - x_3 = 0$	$x_3 - x_4$	$x_3 - x_5$
x_4	$x_4 - x_1$	$x_4 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_4 - x_4 = 0$	$x_4 - x_5$
x_5	$x_5 - x_1$	$x_5 - x_2$	$x_5 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_5 - x_5 = 0$

Pode ser provado que $G = \dfrac{\bar{d}}{2\bar{x}}.$

G é uma medida de dispersão relativa.

7.3. Discrepância máxima

Medida associada à curva de Lorenz. Valor máximo da diferença entre a proporção acumulada de posições e a proporção acumulada de valores: $L_{max} = \max(p_i - q_i)$, i = 1,...,n.



Declividade da curva:

$$B_i = \frac{q_i - q_{i-1}}{p_i - p_{i-1}} = \frac{x_{(i)}}{\bar{x}}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

$$x_{(i)} \leq \bar{x} \Rightarrow B_i \leq 1.$$

$$x_{(i)} > \bar{x} \Rightarrow B_i > 1.$$

Encontrar j tal que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(j)} \leq \bar{x} < x_{(j+1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$. $L_{max} = p_j - q_j$.

Pode ser provado que $L_{max} = \frac{\mathrm{dm}}{2\bar{x}}$. L_{max} é uma medida de dispersão relativa.

Medidas de desigualdade em R

Pacote `ineq`

```
> library(ineq)
```

15 observações

```
> x = c(2.8, 13.7, 6.8, 12.1, 1.1, 5.9, 4.5, 9.6, 2.3, 28.9, 6.7, 0.4,
5.6, 8.0, 10.3)
> summary(x)
 Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  0.400   3.650   6.700   7.913   9.950  28.900
```

Curva de Lorenz: função `Lc`.

```
> clorenz = Lc(x)
```

Índice de Gini:

```
> Gini(x)
[1] 0.4213423
> names(clorenz)
[1] "p"      "L"      "L.general"
```

= p   = q

```
> (jmax = which.max(clorenz$p
- clorenz$L))
 [1] 10
> (Lmax = clorenz$p[jmax] -
clorenz$L[jmax])
[1] 0.2958719
> c(clorenz$p[jmax],
clorenz$L[jmax])
[1] 0.6000000 0.3041281
```

Curva de Lorenz e discrepância máxima (L_{max}):

```
> plot(clorenz, main = "", ylab = "q")
> segments(clorenz$p[jmax], clorenz$L[jmax],  clorenz$p[jmax],
                                            clorenz$p[jmax],lty = 2)
```