

SMA 0333 e 803 Cálculo III - Lista 5

Bach. em Física

1. Determine o domínio da função dada por $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, onde

$$a) f_n(x) = e^{nx} \quad b) f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2} \quad c) f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$

$$d) f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} \quad e) f_n(x) = \frac{n}{1 + nx^2} \quad f) f_n(x) = \sqrt{\frac{1 + nx^2}{n}}$$

$$g) f_n(x) = \frac{nx}{n + x^2} \quad h) f_n(x) = e^{-nx^2}$$

2. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções definidas em A . Seja $B \subset A$, onde para todo $x \in B$ e todo $\varepsilon > 0$ existe inteiro positivo n_0 tal que se $n > n_0$ e $m > n_0$ então $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Mostre que existe $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in B$ temos que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

3. Seja $f_n(x) = \frac{1}{nx^2}$

(a) Determine o domínio da função dada por $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

(b) A sequência $\{f_n\}$ converge uniformemente à f em $(0, +\infty)$? E em $[1, +\infty)$?

(c) Esboce o gráfico das funções f_1 , f_2 e f_3 .

4. Verifique se a convergência é uniforme onde $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ e:

$$a) f_n(x) = \frac{nx}{nx + 1} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad b) f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \end{cases}$$

$$c) f_n(x) = \frac{1}{x + n}, \quad x \geq 0 \quad d) f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$e) f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad f) f_n(x) = \frac{1}{nx}, \quad x \in [1, +\infty)$$

5. Mostre que a sequência de funções $f_n(x) = \cos(nx)$, com $x \in [0, 2\pi]$ não é convergente.

6. Dados um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ sequência numérica convergente para um número $a \in \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Definimos $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_n(x) = a_n g(x)$. Mostre que a sequência $\{f_n\}$ converge em X para $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ag(x)$.

Com isso mostre que $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge para a função nula para $x \in \mathbb{R}$.

7. Mostre que a sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ converge para $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 1$.

8. Se a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente, onde $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1 + x^{2n}}$ converge uniformemente para todo número real.

9. Estude a convergência uniforme das seguintes séries de funções:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}, x \in \mathbb{R} \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4}, x \in \mathbb{R} \quad c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx) + \operatorname{sen}(nx)}{n^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in [-r, r], r > 0 \quad e) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, x \in [-r, r], 0 < r < \frac{1}{2}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}, x \in [-r, r], 0 < r < 1.$$

10. Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente em A à uma função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \text{ Seja } g : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que, para todo } x \in A, |g(x)| \leq M, \text{ onde}$$

$M > 0$ é um número real fixo. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} g f_n$ converge uniformemente em A à função $h(x) = f(x)g(x)$.

11. Mostre que:

$$(a) \text{ Se } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n^2}\right) \text{ então}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Dica: Use o fato que quando $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ então $\operatorname{sen}(x) < x$.

$$(b) \text{ Se } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ então}$$

$$\int_1^x f(t) dt = f(x) - 1$$

(c) Se $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$ então

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

12. (a) Verifique que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ converge uniformemente, dentre \mathbb{R} , à função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

(b) Justifique a igualdade

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{n} \right)$$

13. (**Critério de Cauchy para seqüências**): Mostre que uma seqüência de funções $\{f_n\}$, definidas em $B \subset \mathbb{R}$, converge uniformemente para $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado existir um natural n_0 tal que, para quaisquer que sejam os naturais n e m com $m > n_0$ e $n > n_0$, e para todo $x \in B$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

14. (**Critério de Cauchy para séries**): Mostre que a série de funções $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$

converge uniformemente, em B , para a função $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um natural n_0 tal que, quaisquer que sejam os naturais n e m com $m > n_0$ e $n > n_0$, e para todo $x \in B$,

$$\left| \sum_{k=0}^m f_k(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right|$$