

Grafos – Ordenação Topológica

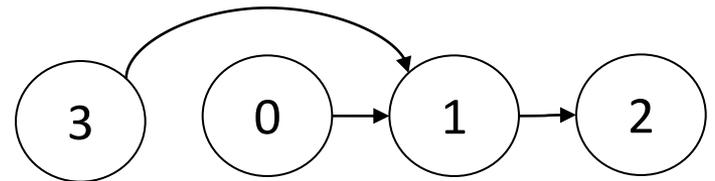
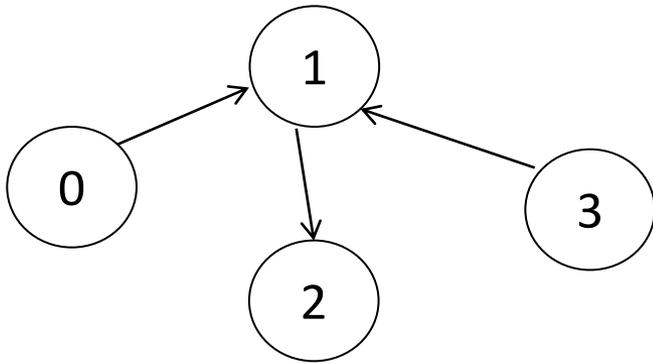
Graça Nunes

1º. Semestre 2012

Ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico

- Ordenação linear dos vértices do grafo tal que u aparece antes de v se há uma aresta (u,v)

- Ordenação topológica: exemplo



Ordenação Topológica

- Todo dígrafo acíclico $D(V,A)$ induz um conjunto parcialmente ordenado $(V, <)$ – reflexivo, antissimétrico e transitivo, onde $<$ é definido como:
$$v_i < v_j \leftrightarrow v_i \text{ alcança } v_j \text{ no dígrafo } D \text{ (há um caminho de } v_i \text{ a } v_j)$$
- Baseando-se nessa ordem parcial, é possível ordenar os vértices de D de modo a obter a sequência $S \equiv v_1, v_2, \dots, v_n \mid v_i < v_j \leftrightarrow i < j, 1 \leq i, j \leq n$

Ordenação Topológica

- Algoritmo

Início

Dado G um dígrafo acíclico;

Inicializar S vazia;

Enquanto houver vértice para ser eliminado do Grafo

faça

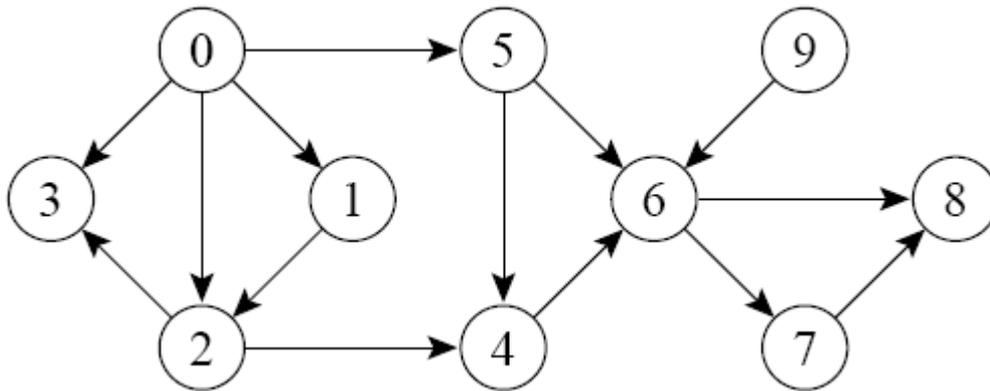
 Seja v , um vértice que tenha grau de entrada nulo;

 Insira v como próximo vértice da sequência S ;

 Exclua v (e suas arestas) do Grafo (resulta num novo dígrafo acíclico)

Fim

- Faça uma ordenação topológica do grafo abaixo



Listas de Adjacência:

0: (1,2,3,5)

5: (4,6)

1: (2)

6: (7,8)

2: (3,4)

7: (8)

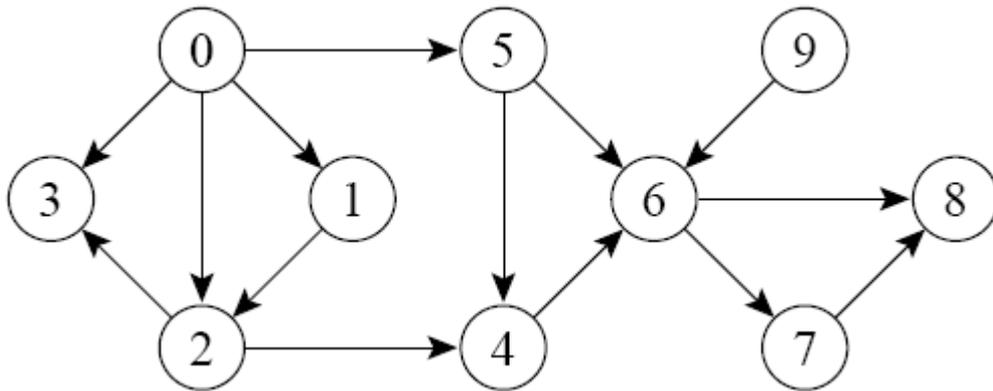
3: ()

8: ()

4: (6)

9: (6)

- Faça uma ordenação topológica do grafo abaixo

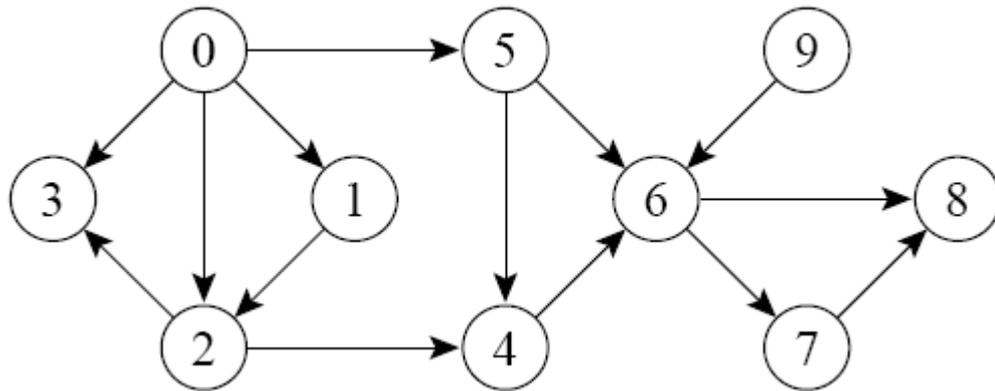


Listas de Adjacência:

0: (1,2,3,5)	5: (4,6)
1: (2)	6: (7,8)
2: (3,4)	7: (8)
3: ()	8: ()
4: (6)	9: (6)

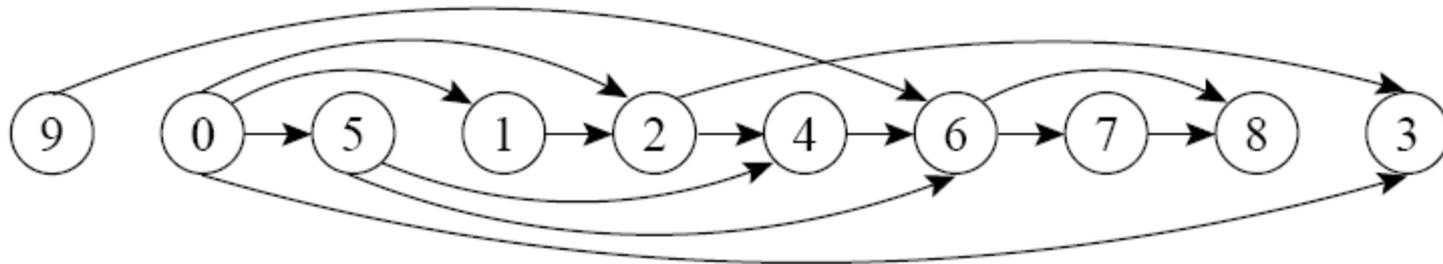


- Outra ordenação topológica do grafo abaixo



Listas de Adjacência:

0: (1,2,3,5)	5: (4,6)
1: (2)	6: (7,8)
2: (3,4)	7: (8)
3: ()	8: ()
4: (6)	9: (6)



Implementação da Ordenação Topológica

Requisitos:

- TAD Dígrafo (Listas de Adjacência)
- Na entrada do dígrafo, já calcular os graus de entrada de cada vértice e armazenar num array n-dimensional, Grau:
 - Para cada aresta (i,j) inserida, incrementar o grau de entrada de j
- Na eliminação de uma aresta (i,j) , por ocasião da exclusão do vértice i , decrementar o grau de entrada de j .

Implementação da Ordenação Topológica

Dados: (V, A) de um dígrafo acíclico

Saída: sequência ordenada S

- a) Inicializar dígrafo D , sequência S e lista de graus Grau ;
- b) Enquanto há arestas para inserir
 - Ler aresta (i,j)
 - Inserir (i,j) em D
 - Incrementar $\text{Grau}(j)$
- c) Enquanto tem vértice a ser incluído em S faça
 - Incluir em S um vértice de grau de entrada 0
 - Eliminar esse vértice de D

- Ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico
 - Qual a complexidade de tempo do algoritmo?
 - Seja $|V| = n$ e $|A| = m$
 - Para a entrada do dígrafo:
 - Para a eliminação dos vértices do dígrafo:
 - Total (após n eliminações):
- Atenção
 - Pode haver mais de uma ordenação topológica
 - Não há ordenação topológica em grafos com ciclos

- Ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico
 - Qual a complexidade de tempo do algoritmo?
 - Seja $|V| = n$ e $|A| = m$
 - Para a entrada do dígrafo: $O(m)$
 - Para a eliminação dos vértices do dígrafo: **equivale a eliminar suas arestas**
 - Total (após n eliminações): $O(m)$
- Atenção
 - Pode haver mais de uma ordenação topológica
 - Não há ordenação topológica em dígrafos com ciclos

Exercício

- Faça um programa que implementa a ordenação topológica de um dígrafo acíclico e que resolva o problema abaixo:

Uma pessoa pretende mudar de casa e para isso precisa realizar as seguintes tarefas:

- (a) Procurar caixas para empacotar suas coisas
- (b) Encontrar uma casa para alugar
- (c) Arrumar suas malas e pacotes
- (d) Despachar a bagagem
- (e) Procurar uma empresa de mudanças
- (f) Alugar a casa encontrada

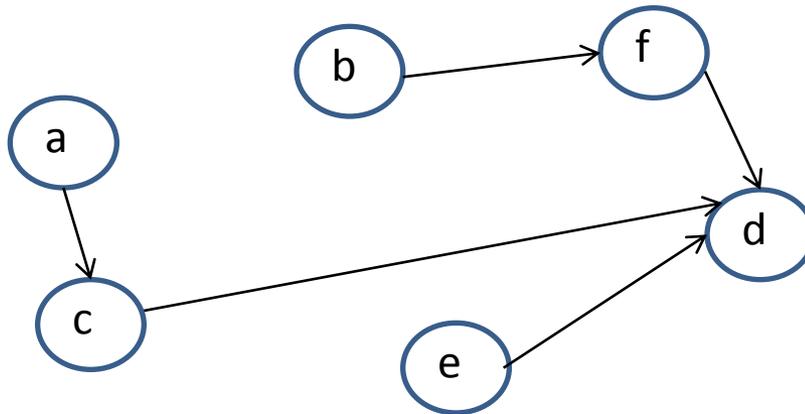
Desenhe o dígrafo com as relações de dependência entre essas tarefas e as ordene de modo que ele possa realizá-las em sequência.

Exercício

- Faça um programa que implementa a ordenação topológica de um dígrafo acíclico e que resolva o problema abaixo:

Uma pessoa pretende mudar de casa e para isso precisa realizar as seguintes tarefas:

- (a) Procurar caixas para empacotar suas coisas
- (b) Encontrar uma casa para alugar
- (c) Arrumar suas malas e pacotes
- (d) Despachar a bagagem
- (e) Procurar uma empresa de mudanças
- (f) Alugar a casa encontrada



Exercício

- Faça um programa que implementa a ordenação topológica de um dígrafo acíclico e que resolva o problema abaixo:

Uma pessoa pretende mudar de casa e para isso precisa realizar as seguintes tarefas:

- (a) Procurar caixas para empacotar suas coisas
- (b) Encontrar uma casa para alugar
- (c) Arrumar suas malas e pacotes
- (d) Despachar a bagagem
- (e) Procurar uma empresa de mudanças
- (f) Alugar a casa encontrada

Ord.1

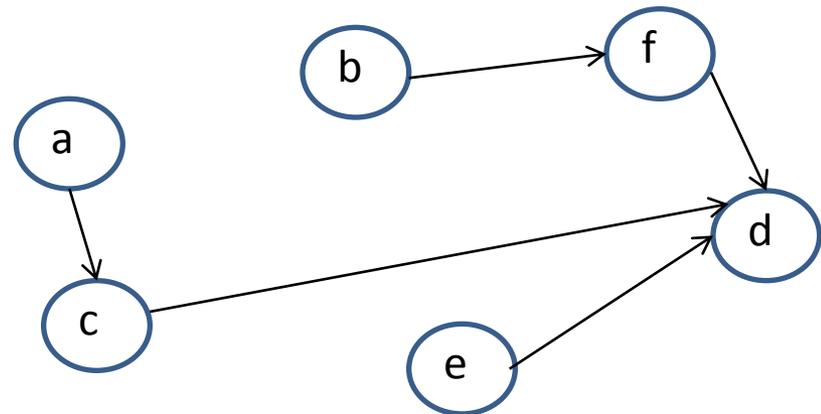


Ord.2



ou

ou...



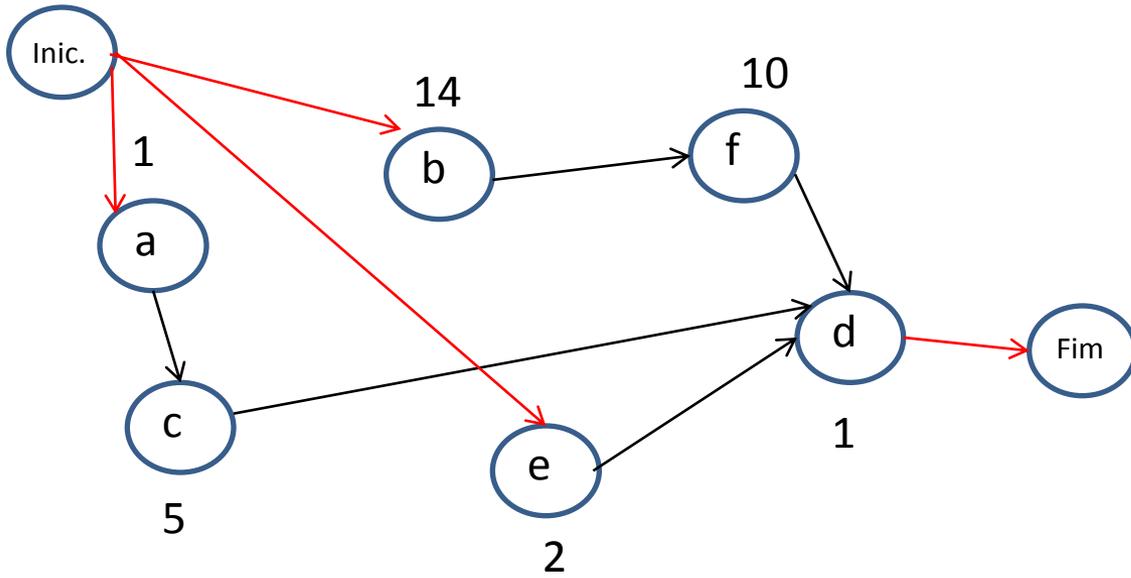
Para pensar

- Suponha adicionalmente que as tarefas têm previsão de realização em dias:

Uma pessoa pretende mudar de casa e para isso precisa realizar as seguintes tarefas:

- | | |
|--|-----------|
| (a) Procurar caixas para empacotar suas coisas | - 1 dia |
| (b) Encontrar uma casa para alugar | - 14 dias |
| (c) Arrumar suas malas e pacotes | - 5 dias |
| (d) Despachar a bagagem | - 1 dia |
| (e) Procurar uma empresa de mudanças | - 2 dias |
| (f) Alugar a casa encontrada | - 10 dias |

Suponha que ele possa realizar simultaneamente tarefas que sejam independentes e determine o número mínimo, em dias, que ele vai gastar para se mudar.



Dia:	1	2	3	...	6	...	15	...	25	26
	a	b	b	...	b	...	f	...	d	---
	b	e	c							
	e	c								

Caminho Crítico:
entre início e fim, com o maior custo