LABIC

# SISTEMAS INTELIGENTES

Profa. Roseli Ap. Francelin Romero



LABIC

## Introdução

- **Conjuntos Nebulosos (FUZZY)**
  - Teoria conveniente para tratamento de incertezas, termos lingüísticos, redundâncias, imprecisão e de forma geral conceitos mal definidos.
  - Em meados de l960, **Zadeh** introduziu a noção de **conjunto fuzzy** para permitir que esses conceitos fossem modelados.
  - Exemplo de conceitos (de quantidades) definidos de forma IMPRECISA: “poucos livros”, “uma longa estória”, “uma mulher bonita”, “um homem alto”.
  - A teoria clássica de conjunto é governada por uma lógica que dá à uma proposição um valor: **falso** ou **verdadeiro.**
  - Essa lógica não representa bem conceitos **VAGOS.**



LABIC

## Introdução

- Conjuntos fuzzy: A teoria de conjuntos fuzzy, vista como uma extensão da teoria de conjuntos clássicos, está associada aos conceitos básicos de funções de pertinência, operações com conjuntos fuzzy, números fuzzy, relações nebulosas, regras fuzzy, regra composicional de inferência, etc.
- Lógica fuzzy : extensão das lógicas bi-valores. Ao invés de considerar apenas dois valores-verdade (Verdadeiro=0 e Falso=1) como é o caso da lógica bi-valores, a lógica fuzzy pressupõe que os valores-verdade são conjuntos fuzzy definidos no intervalo [0, 1].

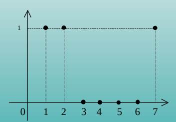


LABIC

## Teoria clássica x fuzzy

**Teoria de conjuntos clássicos**

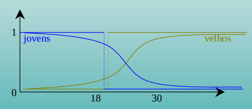
A : U → {1,0}
$x \in$ U |→ {1,0}




Considere U = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {1,2,7}

**Teoria de conjuntos fuzzy**

A($x$) : U → [1,0]
$x \in$ U |→ $y$ = A($x$)






LABIC

## Conjuntos fuzzy

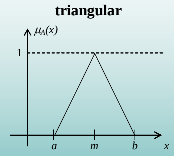
- **Idéia principal na teoria de conjunto fuzzy** é que um elemento tem um grau de pertinência num conjunto fuzzy.
- Então, uma proposição não precisa ser simplesmente **verdadeira** ou **falsa**, mas parcialmente verdadeira com um certo grau. Usualmente, assume-se que este grau é um número real pertencente ao intervalo [0,1].
- Por exemplo, consideremos o conjunto fuzzy **“VELHO”**.
  - Claramente, alguém com 70 anos é velho ⇒ grau de pertinência ( ou relacionamento ) de uma idade 70 pode ser 1.
  - Alguém com 60 anos, não é tão certo que é um **velho ou não** ⇒ **parcialmente velho** ⇒ grau de pertinência da idade 60 como 0.7.
  - Portanto, a vagueza do termo **“VELHO”** pode ser capturada matematicamente.



LABIC

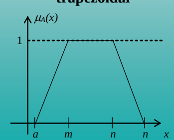
## Funções de pertinência

**triangular**




$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{se } x<a\\ \dfrac{x-a}{m-a}, \text{se } a<x\le m\\ \dfrac{b-x}{b-m}, \text{se } m<x\le b\\ 0, \text{se } x\ge b\end{cases}$$

**trapezoidal**

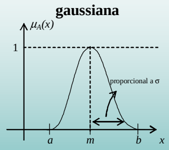



$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, \text{se } x<a\\ \dfrac{x-a}{m-a}, \text{se } a<x\le m\\ 1, \text{se } m<x\le n\\ \dfrac{b-x}{b-n}, \text{se } n<x\le b\\ 0, \text{se } x\ge b\end{cases}$$

LABIC

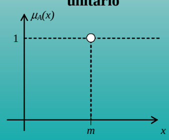
# Funções de pertinência

gaussiana




$$\mu_A(x) = \exp^{-\sigma(x-m)^2}$$

unitário




$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x = m \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$



LABIC

# DEFINIÇÃO:Conjunto fuzzy

- Considerando que X = {*x*} seja o universo de discurso contendo diversas características da variável *x*, a função de pertinência *μ(x)* indica com que grau a variável *x* pertence ao conjunto A definido por um conjunto de pares ordenados.

**A = { (x, $\mu_A$(x)} ,   x ε X**

onde ***$\mu_A(x)$*** é chamado de **grau de pertinência** de *x* em **A** e **$\mu_A$ : X → M** é a função de **X** a um espaço **M** chamado de **espaço de pertinência.**

- Quando **M = {0, 1}, A** é **não-fuzzy** e **$\mu_A$** torna-se idêntica à função característica.

**EXEMPLO: CONJUNTO FUZZY "ALTO"**
Os elementos são homens e seus graus de pertinência dependem de suas alturas:
**Homem com 1,50m. pode ter grau 0**
**Homem com 2,00m. Pode ter grau 1**



LABIC

# Conjuntos fuzzy

**Notação: Conjunto Fuzzy *A***

- Função de Pertinência:
  ***A : X*** → **[0,1]**   ***A*(x) = y**
  ***$\mu_A$ : X*** → **[0,1]**   ***$\mu_A$* (x) = y**

- Conjunto Fuzzy com Universo Finito:
  $A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n$
  $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$

- Conjunto Fuzzy com Universo Contínuo:
  $A = \int_X \mu_A(x)/x$



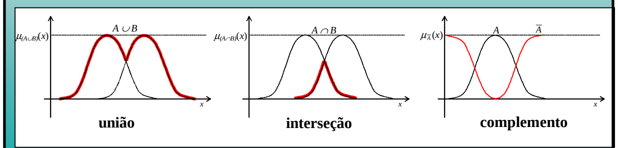
LABIC

# Operações com conjuntos fuzzy

**1) União**: $\mu_{(A \cup B)} = max[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

**2) Interseção**: $\mu_{(A \cap B)} = min[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$

**3) Complemento**: $\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A(x)$






LABIC

# EXEMPLO

**CONJUNTO BASE *X* = {0,1,2, …,10}**

**Ótimo** = { 0.5/8 + 0.8/9 + 1/10 }
**Bom** = { 0.4/5 + 0.7/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 }
**Regular** = { 0.1/4 + 0.5/5 + 1/6 + 0.5/7 + 0.1/8 }
**Ruim** = { 0.3/2 + 0.7/3 + 1/4 + 0.7/5 }
**Péssimo** = { 1/0 + 1/1 + 1/2 + 0.7/3 + 0.3/4 }

**Complemento:**
**não Bom** = { 1/0 +1/1 +1/2 + 1/3 + 1/4 + 0.6/5 + 0.3/6 }

**Negação ≠ antônimo**
**não bom ≠ ruim**

**União:**
**Otimo ∨ Regular** = {0.1/4 + 0.5/5 + 1/6 + 0.5/7 + 0.5/8 + 0.8/9 + 1/10 }

**Intersecção:**
**Ruim ∧ Péssimo** = { 0.3/2 + 0.7/3 + 0.3/4 }



LABIC

# EXEMPLO

| Altura(m.) | Grau de pertinência |
|---|---|
| 1.50 | 0.00 |
| 1.54 | 0.08 |
| 1.58 | 0.32 |
| 1.60 | 0.50 |
| 1.64 | 0.82 |
| 1.68 | 0.98 |
| 1.70 | 1.00 |

**CONJUNTO FUZZY: AVALIAÇÃO**
**Alto : alturas → [ 0,1 ]**

**contra-domínio**

**domínio**

LABIC

## A Álgebra de Subconjuntos fuzzy

**1) UNIÃO** $\mu_{(ALTO\ \underline{OR}\ BAIXO)} = \max(\mu_{ALTO}, \mu_{BAIXO})$

| ALTO | OR | BAIXO |
|---|---|---|
| **1.50** | | **1.00** |
| **1.54** | | **0.92** |
| **1.58** | | **0.68** |
| **1.60** | | **0.50** |
| **1.64** | | **0.82** |
| **1.68** | | **0.98** |
| **1.70** | | **1.00** |

- A **UNIÃO** significa dizer que um homem é **ALTO** ou **BAIXO.** Podemos imaginar que ele é **NÃO-TAMANHO-MÉDIO.** Logo, obtemos um novo conceito:**NÃO-TAMANHO-MÉDIO** dos conceitos **ALTO** e **BAIXO**

CONJUNTOS NÃO FUZZY SÃO CHAMADOS CONJUNTOS "CRISP"



LABIC

## A Álgebra de Subconjuntos fuzzy

**2) INTERSEÇÃO** $\mu_{(ALTO\ \underline{AND}\ BAIXO)} = \min(\mu_{ALTO}, \mu_{BAIXO})$

| ALTO | AND | BAIXO |
|---|---|---|
| **1.50** | | **0.00** |
| **1.54** | | **0.08** |
| **1.58** | | **0.32** |
| **1.60** | | **0.50** |
| **1.64** | | **0.18** |
| **1.68** | | **0.02** |
| **1.70** | | **0.00** |

- A **INTERSEÇÃO** significa pensar que um homem é **ALTO e BAIXO ⇒ MÉDIO**.
- Mas é mais razoável dizer que ele é **NÃO-ALTO** e **NÃO-BAIXO**. VERIFICAR !!!
- Do ponto de vista da **Teoria Fuzzy** as representações são equivalentes



LABIC

## A Álgebra de Subconjuntos fuzzy

**3) COMPLEMENTO** $\mu_{(NAO\text{-}ALTO)} = 1 - \mu_{ALTO}$

| ALTO | | NÃO-ALTO | |
|---|---|---|---|
| **1.50** | **0.00** | **1.50** | **1.00** |
| **1.54** | **0.08** | **1.54** | **0.92** |
| **1.58** | **0.32** | **1.58** | **0.68** |
| **1.60** | **0.50** | **1.60** | **0.50** |
| **1.64** | **0.82** | **1.64** | **0.18** |
| **1.68** | **0.98** | **1.68** | **0.02** |
| **1.70** | **1.00** | **1.70** | **0.00** |

- Novo LABEL para **NÃO-ALTO**: **BAIXO**
- Isto não significa que **BAIXO** tenha que ser um antônimo de **"ALTO"**



LABIC

## Propriedades dos operadores fuzzy

| | |
|---|---|
| Condições de limite | $A \cup \varnothing = A$, $A \cup \mathbf{X} = \mathbf{X}$<br>$A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap \mathbf{X} = A$ |
| Comutatividade | $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ |
| Associatividade | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$<br>$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| Distributividade | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |



LABIC

## Propriedades dos operadores fuzzy

| | |
|---|---|
| Idempotência | $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ |
| Involução | $\overline{\overline{A}} = A$ |
| Lei da contradição | $A \cap \bar{A} = \varnothing$ |
| Lei da exclusão do meio | $A \cup \bar{A} = \mathbf{X}$ |
| Lei de Morgan | $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$<br>$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ |



LABIC

## Normas triangulares

- Classe geral de operadores (**normas** e **co-normas**) de união e interseção que satisfazesm as propriedades de comutatividade, associatividade, monotonicidade e condições de limite.
- Operações baseadas em normas e co-normas triangulares podem operar conjuntos em universos distintos (diferente da união e interseção que trabalham com conjuntos definidos num mesmo universo).
- Sejam *A* e *B* dois conjuntos fuzzy definidos nos universos **X** e **Y**, respectivamente, e *a* e *b* valores de pertinência dados por $a = \mu_A(x)$ e $b = \mu_B(y)$. Então, as normas e co-normas triangulares podem ser definidas como:

LABIC

## Normas triangulares

**T-NORMA:**

- Função ***t*** de dois argumentos:

***t*** **: [ 0,1 ]$^2$ → [ 0,1 ] → [0,1],** que satisfaz as seguintes condições:

**1)** não decrescente ponto a ponto: $a\ \mathbf{t}\ b \le c\ \mathbf{t}\ d$ para $a \le c$ e $b \le d$
**2)** comutatividade: $a\ \mathbf{t}\ b = b\ \mathbf{t}\ a$
**3)** associatividade: $(a\ \mathbf{t}\ b)\ \mathbf{t}\ c = a\ \mathbf{t}\ (b\ \mathbf{t}\ c)$
**4)** condições de limite: $a\ \mathbf{t}\ 0 = 0$ e $a\ \mathbf{t}\ 1 = a$

**T-NORMA = OPERADOR DE INTERSEÇÃO**



LABIC

## Normas triangulares

**S-NORMA (CO-NORMA):**

- Função ***t*** de dois argumentos:

***t*** **: [ 0,1 ]$^2$ → [ 0,1 ] → [0,1],** que satisfaz as seguintes condições:

**1)** não decrescente ponto a ponto: $a\ \mathbf{s}\ b \le c\ \mathbf{s}\ d$ para $a \le c$ e $b \le d$
**2)** comutatividade: $a\ \mathbf{s}\ b = b\ \mathbf{s}\ a$
**3)** associatividade: $(a\ \mathbf{s}\ b)\ \mathbf{s}\ c = a\ \mathbf{s}\ (b\ \mathbf{s}\ c)$
**4)** condições de limite: $a\ \mathbf{s}\ 0 = a$ e $a\ \mathbf{s}\ 1 = 1$

**S-NORMA = OPERADOR DE UNIÃO**



LABIC

## Operações Algébricas

- Sejam A, B e C conjuntos fuzzy, então define-se:

- Soma Algebrica: C = A + B
  $\mu_{(A+B)}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\ \mu_B(x)$

- Soma Limitada: C = A ⊕ B
  $\mu_{A \oplus B}(x) = min\ \{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$

- Diferença Limitada: C = A (-) B
  $\mu_{A\,(-)\,B}(x) = max\ \{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$



LABIC

## Outras operações

- Sejam A e B conjuntos fuzzy no mesmo universo **U**

- A medida de **possibilidade** quantifica o grau de sobreposição entre dois conjuntos.

$$Poss(A,B) = \sup_{x \in X}[\min(\mu_A(x), \mu_B(x))]$$

- A medida de **necessidade** quantifica o grau de inclusão de um conjunto em outro.

$$Nec(A,B) = \inf_{x \in X}[\max(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x))]$$



LABIC

## Relações fuzzy

- As relações fuzzy são generalizações das relações tradicionais. Nas relações fuzzy, cada elemento de um conjunto possui uma dependência (seja nula ou não) com cada elemento de outro conjunto.

- Sejam **X** e **Y** dois universos quaisquer. Uma relação fuzzy *R* é um conjunto fuzzy definido em **X** x **Y** que associa a cada elemento de **X** x **Y** um grau de pertinência definido no intervalo unitário, ou seja, R : **X** x **Y** → [0; 1].

$$R = \{((x,y), \mu_R(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y\}$$



LABIC

## Relações fuzzy

- Exemplos:

1) Sejam os conjuntos universos **X** = { a, b, c } e **Y** = { 1, 2 }, uma relação *R* pode ser definida como:

R = {0.1 | (a,1)+0.6 | (a,2)+0.9 | (b,1)+1 | (b,2)+ 0 | (c,1) + 0.2 | (c,2)}

2) Sejam os conjuntos universos **X** = {NY, Paris} e **Y** = {Beijing, NY, Londres}, uma relação R pode ser definida na representação matricial como:

***R*** **→** relação fuzzy representando **muito longe.**

$$R = \begin{array}{c|cc} & \textbf{NY} & \textbf{Paris} \\ \hline \textbf{Beijing} & 1 & 0.9 \\ \textbf{NY} & 0 & 0.7 \\ \textbf{Londres} & 0.6 & 0.3 \end{array}$$

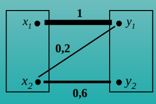
# Relações fuzzy

- Para universos discretos, as relações podem representadas por grafos ou matrizes. Os nós destes grafos são elementos de **X** e **Y**, enquanto que as arestas correspondem aos graus de pertinência.

**X** = $\{x_1, x_2\}$
**Y** = $\{y_1, y_2\}$

R = $\{1 \mid (x_1,y_1) + 0 \mid (x_1,y_2) + 0.2 \mid (x_2,y_1) + 0.6 \mid (x_2,y_2)\}$

$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$








# Operações com relações fuzzy

- Sejam $R_1$ e $R_2$ relações em **X** x **Y**, então as operações são dadas por:

**1) União**: $\mu_{(R1 \cup R2)}(x,y) = \mu_{(R1)}(x,y)$ ***s*** $\mu_{(R2)}(x,y)$

**2) Interseção**: $\mu_{(R1 \cap R2)}(x,y) = \mu_{(R1)}(x,y)$ ***t*** $\mu_{(R2)}(x,y)$

**3) Complemento**: $\mu_{(\neg R1)}(x,y) = 1 - \mu_{R1}(x,y)$





# Composição de relações fuzzy

- Uma relação composição ou simplesmente **composição de relações fuzzy** pode ser simplificada como:

R1(A,B) R2(B,C)

R(A,C)

- A composição mais comum é: sup-**t**: R = G ○ W

$$\mu_R(x,y) = \sup_{z \in Z}[\mu_G(x,z) \, \mathrm{t} \, \mu_W(z,y)]$$





# Composição de relações fuzzy

- 1) Composição: sup-**t**: R = G ○ W

$$\mu_R(x,y) = \sup_{z \in Z}[\mu_G(x,z) \, \mathrm{t} \, \mu_W(z,y)]$$

- As composições mais conhecidas são as que usam o *min* e o produto algébrico como normas-**t**, sendo denominadas de composição *max-min* e max-prod, respectivamente

- 2) Composição: inf-s: R = G ● W

$$\mu_R(x,y) = \inf_{z \in Z}[\mu_G(x,z) \, \mathrm{s} \, \mu_W(z,y)]$$

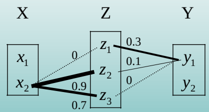




# Exemplo de composição *max-min*

- Considere G(*x,z*) e W(*z,y*) relações fuzzy discretas

$$G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array} \qquad W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.9 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \end{array}$$




- O resultado da composição R, considerando o *min* como t-norma (operador ∧), é dado por:

$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ \boxed{0.1} & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mu_R(x_2, y_1) = \sup_z[0 \wedge 0.3, 0.9 \wedge 0.1, 0.7 \wedge 0];$$

$$\mu_R(x_2, y_1) = \sup_z[0, 0.1, 0] = 0.1.$$





# Sistemas Fuzzy

Sistema Fuzzy

→ Variaveis de entr./saída

→ Regras Fuzzy

→ Métodos de Inferencia Fuzzy

LABIC

# Raciocínio aproximado

- Em sistemas fuzzy, uma **conclusão** é derivada a partir de **fatos** e **regras fuzzy**
- Regras fuzzy são interpretadas como relações fuzzy
- As regras modelam sentenças em linguagem natural (ou artificial) através do conceito de variáveis lingüísticas.
- A composição de regras fuzzy (**inferência**) permite a derivação de um conclusão.
- Este processo é denominado de **raciocínio aproximado**



LABIC

# Variáveis lingüísticas

- Uma **variável lingüística** pode ser definida, de uma maneira informal, como uma variável cujos valores são palavras ou sentenças, ao invés de números (Pedrycz & Gomide, 1998).
- Exemplos de variáveis lingüísticas que podem assumir os seguintes **valores lingüísticos:**
  - Temperatura = {muito baixa, baixa, média, alta, muito alta}
  - Tamanho = {alto e gordo, mais ou menos magro e baixo, magro e baixo}

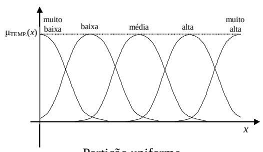


LABIC

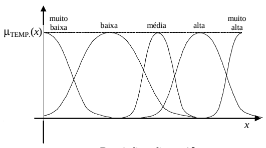
# Variáveis lingüísticas

- Cada **valor lingüístico** de uma variável lingüística é associado a um conjunto fuzzy em um mesmo universo de discurso.

**Temperatura**




Partição uniforme




Partição não-uniforme



LABIC

# Regras fuzzy

- As regras fuzzy armazenam o conhecimento do sistema nebuloso e da aplicação

lógica fuzzy

**Se** <*antecedente*> **então** <*conseqüente*>

Se *X é A* **então** *Y é B*

Proposições fuzzy

- *X* e *Y* são variáveis lingüísticas nos universos **X** e **Y**
- *A* e *B* são conjuntos fuzzy representando valores lingüísticos para as variáveis *X* e *Y.*



LABIC

# Regras fuzzy

**Se** *velocidade* *é* *alta* **então** o *impacto* *é* *forte*

variável lingüística — valor lingüístico — variável lingüística — valor lingüístico

**Se** *altitude* *é* *alta* **então** a *temperatura* *é* *baixa*

variável lingüística — valor lingüístico — variável lingüística — valor lingüístico



LABIC

# Regras fuzzy

- Uma regra do tipo "**Se** *X é A* **então** *Y é B*" é abreviada para A → B e pode ser relação *R* no produto cartesiano **X** × **Y**

$R$: $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \{0,1\}$

$$R = \{(x,y), \mu_R(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}\}$$

- A relação *R* é descrita através da função de pertinência definida no espaço bidimensional (i.e. *R* é um conjunto fuzzy)

$$\mu_R(x,y) = f(\mu_A(x), \mu_B(y)), \qquad f: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$$

$$B'(y) = \max_{x \in \mathbf{X}}(\min[A'(x), R(x,y)])$$

LABIC

## Regras fuzzy

- Sendo uma regra fuzzy uma relação, então é possível obter um valor de pertinência para as regras. O grau de pertinência indica quanto a regra é considerada verdadeira.

- As relações fuzzy (regras) vêm de 3 classes de funções através de **t**-normas (**t**) e **s**-normas (**s**):

1) **Conjunção fuzzy:** $f_t(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \mu_A(x)\ \mathbf{t}\ \mu_B(y)$

2) **Disjunção fuzzy:** $f_s(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \mu_A(x)\ \mathbf{s}\ \mu_B(y)$



LABIC

## Regras fuzzy

3) **Implicação fuzzy:** representa a relação *R: A→B* = **A ⇒ B**

$$f_t(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \mu_A(x)\ \mathbf{t}\ \mu_B(y)$$
$$p \Rightarrow q = \overline{p} \vee q$$

lógica fuzzy

$$f_i(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \min[1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)]$$
$$p \Rightarrow q = 1 \wedge (1 - p + q)$$

lógica fuzzy



LABIC

## Regras fuzzy

- As regras fuzzy podem ter mais de uma variável no antecedente e no conseqüente

**Se** $X_1$ *é* $A_1$ **E** $X_2$ *é* $A_2$ **E ... E** $X_n$ *é* $A_n$ **então** *Y é B*
**Se** $X_1$ *é* $A_1$ **OU** $X_2$ *é* $A_2$ **OU ... OU** $X_n$ *é* $A_n$ **então** *Y é B*
**Se** $X_1$ *é* $A_1$ **E ... E** $X_n$ *é* $A_n$ **então** $Y_1$ *é* $B_1$ **E** $Y_2$ *é* $B_2$ **E ... E** $Y_n$ *é* $B_n$

- Em um sistema fuzzy o conhecimento é representado pelo conjunto de regras

Regra i: **Se** $X_{i1}$ *é* $A_{i2}$ **E ... E** $X_{im}$ *é* $A_{im}$ **então** $Y_{i1}$ *é* $B_{i2}$ **E ... E** $Y_{im}$ *é* $B_{im}$



LABIC

## Inferência Fuzzy

- Uma composição e uma implicação tornam possíveis Inferência FUZZY

- Lei de Inferência Composicional:

dada uma implicação R : A ⇒ B e uma composição ○, **um valor fuzzy B'** pode ser inferido quando **um valor A'** é conhecido

B' = A' ○ R



LABIC

## Inferência Fuzzy

**R** relação fuzzy em **X** x **Y**
**A'** conjunto fuzzy em **X**
**B'** conjunto fuzzy em **Y**

$$B'(y) = \max_{x \in \mathbf{X}}(\min[A'(x), R(x, y)])$$

**Proposições Condicionais: Se** *V é A* **então** *U é B*
induz relação **R** sobre **X** × **Y** determinada por:

$$R(x, y) = \mathbf{I}[A(x), B(y)]$$

onde I denota a implicação fuzzy (⇒)



LABIC

## Inferência Clássica: Raciocínio exato

- Inferência : cadeia de *Matching*
- Sistemas de IA (sistemas de produção): Matching é EXATO
- Na lógica bi valores, o *modus ponens* (MP) é a regra básica de inferência utilizada

| | | |
|---|---|---|
| *MP* | *premissa 1 (fato):* | *X é A* |
| | *premissa 2 (regra):* | **se** *X é A* **então** *Y é B* |
| | *(conclusão):* | *Y é B* |

ou seja, $X \rightarrow Y$ e *X* é true ==> *Y* é inferido exatamente.

LABIC

## Inferência Clássica: Raciocínio exato

| | |
|---|---|
| *premissa 1 (fato):* | *o tomate é vermelho* |
| *premissa 2 (regra):* | **se** *o tomate é vermelho* **então** *ele está maduro* |
| *(conclusão):* | *o tomate está maduro* |

- Se não ocorre o *matching* exato entre o fato e a regra, então nada pode ser concluído



LABIC

## Inferência Fuzzy: Raciocínio aproximado

- Na lógica fuzzy, as premissas e conclusão podem ser imprecisas e não apresentar valores exatos.
- A representação do conhecimento na lógica fuzzy se aproxima do raciocínio humano
- A regra mais utilizada para esta lógica é o *modus ponens* generalizado (MPG)
- Em MPG, não é necessário ocorrer o *matching* exato entre o fato e a regra
- Embora a premissa 1 apresente um fato diferente, porém muito semelhante ao conhecimento do antecedente da premissa 2, pode-se concluir alguma informação de *Y*.



LABIC

## Inferência Fuzzy: Modus Ponen Generalizado

| | | |
|---|---|---|
| | *premissa 1 (fato):* | *X é A'* |
| *MPG* | *premissa 2 (regra):* | **se** *X é A* **então** *Y é B* |
| | *(conclusão):* | *Y é B'* |

| | |
|---|---|
| *premissa 1 (fato):* | *o tomate é mais ou menos vermelho* |
| *premissa 2 (regra):* | **se** *o tomate é vermelho* **então** *ele está maduro* |
| *(conclusão):* | *o tomate está mais ou menos maduro* |



LABIC

## Leis de inferência fuzzy

**I) Modus Ponen Generalizada**

**Se** *x é A* **então** *y é B*
Sendo que o fato é (*x é A'*), então (*y é B'*)

*B'* pode ser inferido pela regra composicional:
$B' = A' \circ (A \Rightarrow B) = A' \circ R_{AB}$

$\circ$ : operador composicional
$R_{AB}$: matriz relacional fuzzy representando a relação implicação $A \Rightarrow B$



LABIC

## Leis de inferência fuzzy

**II) Modus Tolen Generalizada**

**Se** *x é A*, **então** *y é B*
Sabendo que *y* é inferido como *B'*, como encontrar o fato da regra (ou seja, como encontrar *A'*)?

*A'* pode ser encontrado pela regra composicional:
$A' = (A \Rightarrow B) \circ B' = R_{AB} \circ B'$

**III) Lei Transitiva**

$A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$, então $A \rightarrow C$



LABIC

## Leis de Inferência Fuzzy

**IV) Leis de Morgan**

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Outras leis de inferencia fuzzy são dadas em

Yager and Zadeh, *"An Introduction ti Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems"*, Boston, Kluwer Academic, 1992.

LABIC

## Exemplo - MPG

$R$ induzida por proposição condicional

*premissa 1 (fato):* *X é A'*
*premissa 2 (regra):* **se** *X é A* **então** *Y é B*

*(conclusão):* *Y é B'*

**Exemplo:**
$A = \{0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.6/x_3\}$
$B = \{1/y_1 + 0.4/y_2\}$
$A' = \{0.6/x_1 + 0.9/x_2 + 0.7/x_3\}$

$$R = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 1 & 0.9 \\ x_2 & 1 & 0.4 \\ x_3 & 1 & 0.8 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.9 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 1 & 0.4 \\ 1 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$B' = \{0.9/y_1 + 0.7/y_2\}$



LABIC

## Métodos de Inferência

- **Representação Matricial**

X = Y = { 1 + 2 + 3 + 4 }
A = { 0.4/2 + 1/3 + 0.5/4 } B = { 1/2 + 0.6/3 + 0.2/4 }

$D = A \oplus B \qquad B' = A' \circ D$

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 1 & 1 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$



LABIC

## Métodos de Inferência

**1)** Considera-se uma base de regras com uma única regra composta por uma variável no antecende e uma no conseqüente

Sabendo que uma regra pode ser representada por uma relação, a conclusão pode ser inferida através de composição

*premissa 1 (fato):* *X é A'*
*premissa 2 (regra):* *R (relação resultante da regra "***se** *X é A* **então** *Y é B")*

*(conclusão):* $Y$ é $B' = A' \circ R = A' \circ (A \Rightarrow B)$



LABIC

## Métodos de Inferência

**2)** Com uma base de mais de uma regra, cada regra $R_i$ pode induzir uma relação fuzzy diferente

$R_i$: **se** $X$ é $A_i$ **então** $Y$ é $B_i$, $i = 1, \dots, k$ ( $k$ = número de regras)

O conjunto de regras, por sua vez, resulta numa relação fuzzy que é obtida pela agregação das relações (regras) individuais, como:

$$R = \overset{m}{\underset{i=1}{A_R}}(R_i) = \overset{m}{\underset{i=1}{A_R}}(A_i \Rightarrow B_i)$$

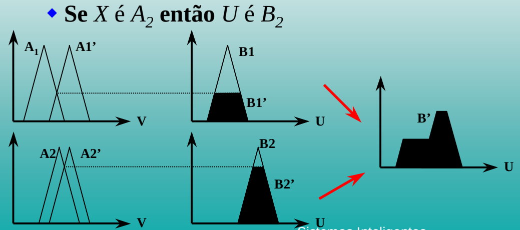
O operador de agregação $A_R$ é normalmente representado por uma s-norma (mas t-normas podem ser usadas)



LABIC

## Métodos de Inferência

- **Inferência Max-min**
  - **Se** $X$ é $A_1$ **então** $U$ é $B_1$
  - **Se** $X$ é $A_2$ **então** $U$ é $B_2$





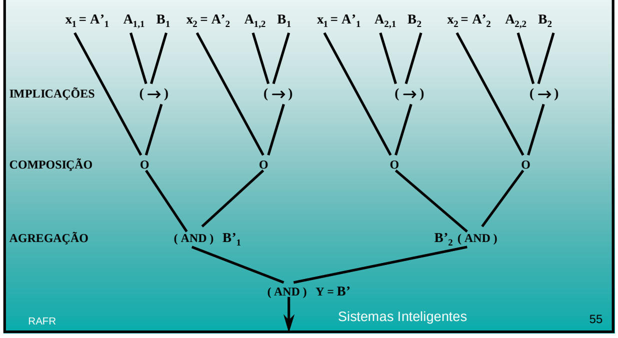

LABIC

## Métodos de Inferência

- Se entre as regras existe um link-OR
  Operação MAX pode ser aplicada.
- Se entre as regras existe um link-AND
  Operação MIN pode ser aplicada.
- Se entre as regras existe um link-Additive
  Operação $\mu_{B'} = \Sigma \mu_{B'_i} w_i, \quad i = 1,2,\dots,m$ é aplicada para inferir

A seleção de qual link usar depende do contexto

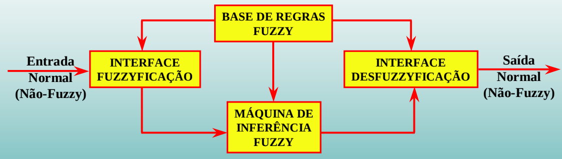
# Exemplo








# Sistemas fuzzy




1) **Interface de Fuzzyficação:** transforma os sinais provenientes do ambiente em conjuntos fuzzy quanto estes não pertencem ao universo dos conjuntos fuzzy para que sejam tratados pelo restante do sistema. Este processo é denominado de *fuzzyficação*





# Sistemas fuzzy

2) **Base de conhecimento**: composta por 2 componentes
   - Base de regras: contém as regras fuzzy que representam o conhecimento sistema
   - Base de dados: contém informações sobre os parâmetros das funções de pertinência (conjuntos fuzzy) e dos operadores de agregação e inferência

3) **Máquina de inferência:** realiza o processo de inferência (raciocínio fuzzy) para obter a saída ou a conclusão

4) **Interface de saída**: transforma a resposta normalizada pelo sistema fuzzy em sinais que sejam interpretados pelo ambiente do problema. Este processo é denominado de *desfuzzyficação*





# Modelo de inferência

- Um dos modelos de inferência mais utilizados para obter conclusões a partir de fatos e regras fuzzy é o modelo de **Mamdani** (Mamdani and Assilian, 1975)

- Para a descrição dos passos do modelo **Mamdani** considere uma base com *k* regras e *m* variáveis no antecedente e uma no conseqüente

*premissa 1 (fato):* $X_1$ *é* $A'_1$ e $X_2$ *é* $A'_2$ e ... e $X_m$ *é* $A'_m$
*premissa 2 (regra 1):* **se** $X_1$ *é* $A_{1,1}$ e $X_2$ *é* $A_{1,2}$ e ... e $X_m$ *é* $A_{1,m}$ **então** $Y$ *é* $B_1$
.
.
*premissa k+1 (regra k):* **se** $X_1$ *é* $A_{k,1}$ e $X_2$ *é* $A_{k,2}$ e ... e $X_m$ *é* $A_{k,m}$ **então** $Y$ *é* $B_k$

---

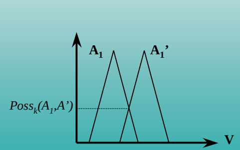
*(conclusão):* $Y$ *é* $B$





# Modelo Mamdani

**1) Comparação (*Matching*)**: Cada variável do *fato* é comparada com sua variável correspondente no antecedente na regra *i* através do operador *max-min* (definido como medida de possibilidade) ou *max-prod*.




$$Poss_{i,1}(A_{i,1}, A'_1) = \sup_{x \in X}[\min(\mu_{A1^i}(x), \mu_{A1'}(x))]$$

Nível de similaridade entre as variáveis $A'_1$ e $A_{i,1}$ da regra *i*





# Modelo Mamdani

**2) Agregação dos antecedentes**: Os níveis de similaridades do antecedente de cada regra são agregados pelo operador norma-**t** se as variáveis são ligadas por E e pelo operador norma-**s** se as variáveis são ligadas por OU.

- Conjunção para regras *i* com *m* variáveis ligadas por **E:**

$$\mu_{A,i} = \mathop{\mathbf{t}}_{v=1}^{m} Poss_{i,v}(A_{i,v}, A'_v)$$

- Disjunção para regras *i* com *m* variáveis ligadas por **OU:**

$$\mu_{A,i} = \mathop{\mathbf{s}}_{v=1}^{m} Poss_{i,v}(A_{i,v}, A'_v)$$

LABIC

## Modelo Mamdani

**3) Derivação da conclusão individual**: Para cada regra, o valor obtido da agregação dos antecedentes é aplicado ao conjunto fuzzy da variável

$$B_i = \mu_{A,i} \; t \; \mu_{C,i}$$

$B_i$: conjunto fuzzy resultante da agregação dos antecendentes com o conseqüente da regra *i*

$\mu_{A,i}$: conjunto fuzzy resultante da agregação dos antecendes da regra *i*

$\mu_{C,i}$: conjunto fuzzy do conseqüente da regra *i*



LABIC

## Modelo Mamdani

**4) Derivação do resultado final**: Os conjuntos fuzzy obtidos na derivação da conclusão de cada regra são agregados através do operador norma-**s** (lembrando que *k* = número total de regras)

$$Q = \mathop{\mathbf{s}}_{i=1}^{k} B_i$$

*Q*: conjunto fuzzy resultante da agregação dos conseqüentes do conjunto completo de regras

$\mu_{A,i}$: conjunto fuzzy resultante da agregação dos antecendentes com o conseqüente da regra *i*

**s**: operador norma-**s** (o operador *max* é o mais utilizado)



LABIC

## Modelo Takagi-Sugeno

$X_1$ é $A'_1$ e $X_2$ é $A'_2$ e ... e $X_m$ é $A'_m$
**se** $X_1$ é $A_{1,1}$ e $X_2$ é $A_{1,2}$ e ... e $X_m$ é $A_{1,m}$ **então** $Y$ é $B_1 = f_1(\mathbf{W_1}, \mathbf{X})$
.
.
**se** $X_1$ é $A_{k,1}$ e $X_2$ é $A_{k,2}$ e ... e $X_m$ é $A_{k,m}$ **então** $Y$ é $B_k = f^l(\mathbf{W_k}, \mathbf{X})$

---

$Y$ é $B$

em que $\mathbf{W_i} = [w_{i,1}, w_{i,2}, ..., w_{i,m}]$ → parâmetros do conseqüente (cada regra i possui $W_i$)
$\mathbf{X} = [X_1, X_2, ..., X_m]$ → variáveis de entrada

- Modelo de inferência Takagi-Sugeno possui 4 passos:

**1) Comparação (Matching)**: idêntico ao modelo de Mamdani

**2) Agregação dos antecedentes**: idêntico ao modelo de Mamdani



LABIC

## Modelo Takagi-Sugeno

**3) Derivação da conclusão individual**: Para cada regra, as variáveis de entrada (correspondente aos antecedentes) são aplicadas na função $f_i(\mathbf{W_i}, \mathbf{X})$ que define o conseqüente juntamente com os parâmetros do vetor $\mathbf{W_i}$

**3) Derivação do resultado final**: os valores resultantes da função $f_i$ e da agregação dos antecedentes $\mu_{A,i}$ são agregados para o cálculo da média ponderada *Y* que indica a saída final do sistema fuzzy.

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu_{A,i} \times f_i}{\sum_{i=1}^{m} \mu_{A,i}}$$

Modelo Takagi-Sugeno não necessita de um método de desfuzzyficação para gerar a saída do sistema, uma vez que *Y* já é um valor não-fuzzy



LABIC

## Modelos de *desfuzzyficação*

**1) Média dos Máximos:** Os valores correspondentes ao máximo da função de pertinência do conjunto fuzzy *Q* resultante da agregação dos conseqüentes são identificados e a média define o valor não-fuzzy

**2) Centro de Massa:** $\hat{q} = \frac{\int_q \mu_C(q) q\, dq}{\int_q \mu_C(q)\, dq}$

$$w^0 = \frac{\sum_j w_j \, \mu_C(w_j)}{\sum_j \mu_C(w)}$$

**3) Centro de Área:** $\int_{-\infty}^{\hat{q}} \mu_C(q)\, dq = \int_{\hat{q}}^{\infty} \mu_C(q)\, dq$

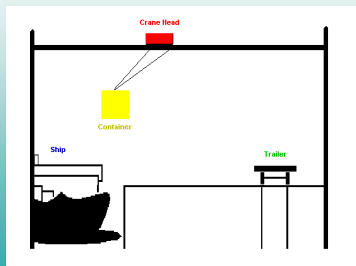
em que Q é o conjunto resultante do Passo 4 no universo **Q** e $\hat{q}$ resulta do balanço entre duas áreas de *Q* determinada por $\hat{q}$



LABIC

## Elementos Básicos de um Sistema de Lógica Fuzzy

Estudo do caso do Guindaste de Container:




Duas variáveis de medida e uma variável de comando!

LABIC

# Elementos Básicos de um Sistema de Lógica Fuzzy

Loop de controle do Guindaste de Conteiner controlado por Lógica Fuzzy:




LABIC

# 1. Fuzzificação: Variáveis Linguísticas

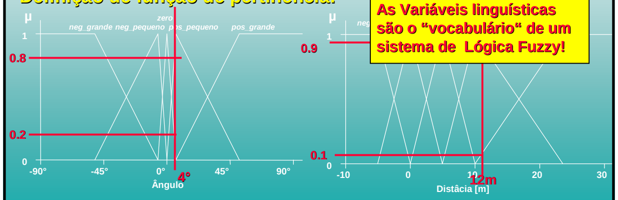
Definição de termos:

Distância := {longe, média, perto, zero, neg_perto}

Ângulo := {pos_grande, pos_pequeno, zero, neg_pequeno, neg_grande}

Potência := {pos_alta, pos_média, zero, neg_média, neg_alta}

Definição de função de pertinência:




As Variáveis linguísticas são o "vocabulário" de um sistema de Lógica Fuzzy!



LABIC

# 2. Inferência Fuzzy: Regras "IF-THEN" (1/3)

Implementação das regras "IF-THEN":

#1: IF Distância = média AND Ângulo = pos_pequeno THEN Potência = pos_média

#2: IF Distância = média AND Ângulo = zero THEN Potência = zero

#3: IF Distância = longe AND Ângulo = zero THEN Potência = pos_média

⇒Agregação: Cálculo da parte do "IF" - antecedente

⇒Composição: Cálculo da parte do "THEN"- conseq.

As regras do sistema de Lógica Fuzzy são as "Leis" que ele executa!



LABIC

# 2. Inferência Fuzzy: Agregação (2/3)

Lógica Fuzzy fornece uma extensão contínua:

⇒ AND: $\mu_R(A \wedge B) = \min\{ \mu_R(A), \mu_R(B) \}$

⇒ OR: $\mu_R(A \vee B) = \max\{\mu_R(A), \mu_R(B) \}$

⇒ NOT: $\mu_R(\text{-}A) = 1 - \mu_R(A)$

Agregação da parte do "IF":

#1: min{ 0.9; 0.8 } = 0.8

#2: min{ 0.9; 0.2 } = 0.2

#3: min{ 0.1; 0.2 } = 0.1

Agregação calcula quão "apropriado" cada regra é para a situação corrente!



LABIC

# 2. Inferência Fuzzy: Composição (3/3)

Resultado para a variável linguística Potência:

| | | |
|---|---|---|
| *pos_alta* | com grau 0.0 | |
| *pos_média* | com grau 0.8 | ( = max{ 0.8 , 0.1 } ) |
| *zero* | com grau 0.2 | |
| *neg_média* | com grau 0.0 | |
| *neg_alta* | com grau 0.0 | |

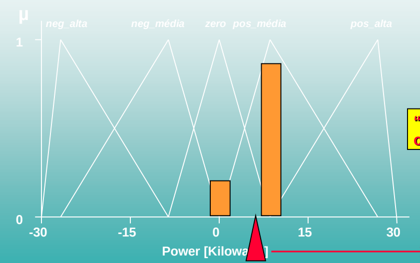
Composição calcula o quanto cada regra influencia as variáveis de saída!



LABIC

# 3. Defuzzificação

Defuzzificando utilizando o método "Centro-do-Gravidade":




$$w^0 = \frac{\sum_j w_j \mu_C(w_j)}{\sum_j \mu_C(w)}$$

"Equilibrando" o resultado!

W=8*0.8= 6.4

Outro método de *defuzzificação* : "Média-dos-Máximos"

LABIC

# Controle Nebuloso

**Vantagens:**

⇒**Simplificação do modelo de processo;**

⇒**Melhor Tratamento das imprecisões inerentes aos sensores utilizados;**

⇒**Facilidade na especificação das regras de controle, em linguagem natural;**

⇒**Satisfação de múltiplos objetivos de controle;**

⇒**Facilidade de incorporação do conhecimento de especialistas**



LABIC

# Fuzzy em Aplicação Reais

## Exemplos de aplicação

**Máquina de Lavar Roupas**

- 159 regras
- diferença máxima de aproximadamente 350 mililitros do valor considerado como ideal
- capaz de economizar 20% de água e energia elétrica
- foi implementado em um controlador de 8 bits.

**Interface Fuzzy para Consultas SQL**

- permite consultas com “palavras vagas”

  ***Ex: Selecionar os funcionários que ganham bem***



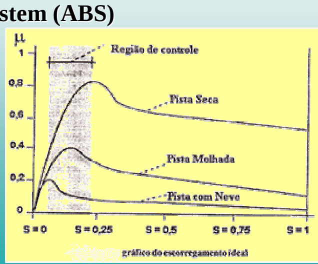
LABIC

# Fuzzy em Aplicação Reais

## Exemplos de aplicação (cont.)

***Anti-Lock Break System* (ABS)**

- sem microcontro-ladores adicionais
- escorregamento determinado através da reação






LABIC

# Softwares Fuzzy

- **Nefclass**
- **np410 - {Neural Planner 4.1}**
- **Unfuzzy 1.1**
- **Fuzzytech**
- **LPA - FLINT {Fuzzy Logic Tool Kit}**
- **Toolbox do Matlab**