1. Mostre que os vetores $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_r\}$ geram V , ou seja, que dado um vetor $u \in V$ ele pode ser escrito como combinação linear desses vetores. Use o fato de que dado $u \in V$, temos que $u = w_1 + w_2$, onde $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$, pois $V = W_1 + W_2$. Mas, w_1 é combinação linear dos vetores de B_1 e w_2 é combinação linear dos vetores de B_2 . Para mostar que C é l.i, use o fato de que $C = B_1 \cup B_2$ onde B_1 e B_2 são l.i (pois são bases), e também que a soma é direta, ou seja, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

2. Veja a proposição 6.3 do livro do Sérgio Zani ... No segundo item, precisamos da matriz M_C^B , mas só nos foi dada a matriz M_B^C. Notem que, a matriz de mudança de base de B para C pode ser vista como a matriz da tranformação identidade escrita nas bases B e C. Sabemos que a transformação identidade é automorfa, de modo que sua matriz, em qualquer base é invertível. O que vocês suspeitam que seja a inversa da matriz M_B^C ?

3. A última parcela na expressão para $\cos(6t)$ é na verdade $32\cos^6(t)$. Notem também que $\cos(0t) = \cos^0(t) = 1$ e $\cos(1t) = \cos^1(t)$.

   (a) Imagine que você faça combinações lineares dos $\cos(kt)$. Como cada $\cos(kt)$ é combinação linear dos $\cos^k(t)$, então uma combinação linear dos $\cos(kt)$ também é combinação linear dos $\cos^k(t)$, ou seja eles geram o mesmo subespaço vetorial H.

   (b) Já vimos que B e C geram H. Resta saber se eles são l.i. Vamos começar com os $\cos(kt)$. Se mostrarmos que dados $\cos(it)$ e $\cos(jt)$, com $i \neq j$, então mostramos que $\{\cos(0t), \ldots, \cos(6t)\}$ é l.i. Temos que $\alpha\cos(it) + \beta\cos(jt) = 0$, tem de ser satisfeita para todo t. Tome $t = 0$ e $t = \pi/i$. Você descobrirá que, como $i \neq j$, $\alpha = \beta = 0$. Tomemos agora $\cos^i(t)$ e $\cos^j(t)$, com $i \neq j$. Temos que $\alpha\cos^i(t) + \beta\cos^j(t) = 0$. Agora, temos dois casos, a saber: i e j são ambos pares ou ímpares (caso I), e i é par e j é ímpar (ou vice-versa) (caso II). Para o caso II, tome $t = 0$ e $t = \pi$. Teremos um sistemas de duas equações para α e β cuja solução é $\alpha = \beta = 0$. Para o caso I, suponhamos, sem perda de generalidade, que $i \neq 0$. Então tomemos $t = 0$ e $t = \arccos(\sqrt[i]{1/2})$. A última escolha faz sentido pois $0 < \sqrt[i]{1/2} < 1$ para qualquer i inteiro positivo. Com isso, obtemos novamente outro sistemas de duas equações para α e β cuja solução, uma vez que $i \neq j$, é $\alpha = \beta = 0$. Então B e C são l.i.

   (c) Observe que já temos as coordenadas dos $\cos(kt)$ na base dos $\cos^k(t)$, então já temos M_B^C . Para obtermos M_C^B invertemos M_B^C.

   (d) A função f a ser integrada é um vetor do espaço H do item b. Se fôssemos achar uma primitiva para essa função da forma como ela nos foi dada, teríamos que trilhar um longo e trabalhoso caminho de integração por partes. Mas talvez exista alguma maneira de reescrevermos a função de modo a facilitar as contas e poupar tempo. Vejamos. Temos as coordenadas f_B dessa função na base B. Para acharmos as coordenadas f_C dessa função na base C, fazemos como na proposição 6.3 (a matriz mudança de base foi calculada no item anterior). Com isso escrevemos a função como combinação linear dos $\cos(kt)$ e calculamos a primitiva, que nesse caso é bem mais fácil.