Lista 1

Exercícios 6 e 11

2022

6. A variável aleatória X tem distribuição binomial truncada (em 0) com função massa de probabilidade

$$f(x;\theta) = \frac{\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}}{1-(1-\theta)^n} I_{\{1,2,\ldots,n\}}(x), \tag{1}$$

em que $n \geq 2$ e $\theta \in (0,1)$.

(a) Apresente um estimador de momentos para θ. Em uma aula calculamos

$$\mu = E(X) = \frac{n\theta}{1-(1-\theta)^n}.$$

Utilizando o primeiro momento, devemos resolver a equação $\mu = x$, ou seja,

$$\frac{n\theta}{1-(1-\theta)^n} = x,$$

que resulta em $u(\theta) = 0$, sendo que

$$u(\theta) = n\theta + x(1-\theta)^n - x$$

é um polinômio de grau n em θ. Não é possível resolver analiticamente $u(\theta) = 0$.

Se $x = 1$, obtemos $\theta = 0$ e se $x = n$, obtemos $\theta = 1$. Nestes dois casos as estimativas de momentos não são úteis, pois não pertencem ao espaço paramétrico $\Theta = (0,1)$. Assim, consideramos abaixo que $x \notin \{1, n\}$.

Notamos que $u(0) = 0$, $u(1) = n - x > 0$ e $du(\theta)/d\theta = n - nx(1-\theta)^{n-1}$. Resolvendo $du(\theta)/d\theta = 0$ obtemos $\theta^* = 1 - \sqrt[n-1]{1/x}$, que é o único ponto crítico de $u(\theta)$. Calculamos $d^2u(\theta)/d\theta^2 = n(n-1)x(1-\theta)^{n-2}$, de modo que $d^2u(\theta)/d\theta^2 > 0$ e θ^* é ponto de mínimo de $u(\theta)$. Pode ser provado que se $0 < \theta < \theta^*$, temos $du(\theta)/d\theta < 0$ e se $\theta^* < \theta < 1$, temos $du(\theta)/d\theta > 0$. Combinando todos estes resultados, concluímos que $du(\theta)/d\theta = 0$, para $\theta \in (\theta^*, 1)$ tem solução única, que é o estimador de momentos de θ.

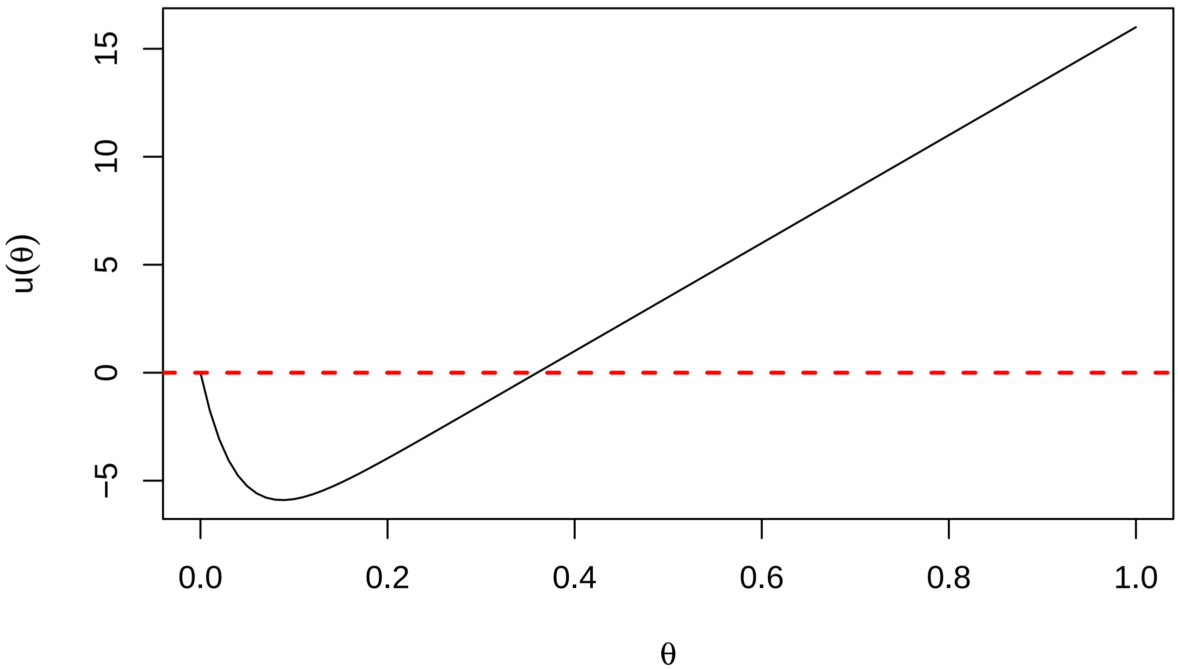
(b) Sabendo que $n = 25$ e $x = 9$ foi observado, apresente uma estimativa de momentos para θ.

Em seguida apresentamos uma solução numérica utilizando a função `uniroot` da linguagem R.

```r
# Função u
u <- function(teta) {
  return(n * teta + x * (1 - teta)^n - x)
}

n <- 25
x <- 9

curve(u, xlab = expression(theta), ylab = expression(u(theta)))
abline(h = 0, lty = 2, col = "red", lwd = 2)
```




```r
# teta*
tcrit <- 1 - (1 / x)^(1 / (n - 1))
cat("\n teta* =", tcrit)
```

```
##
##  teta* = 0.08748525
```

```r
# Estimativa de momentos
tetam <- uniroot(u, interval = c(tcrit, 1))$root
cat("\n Estimativa de momentos =", tetam)
```

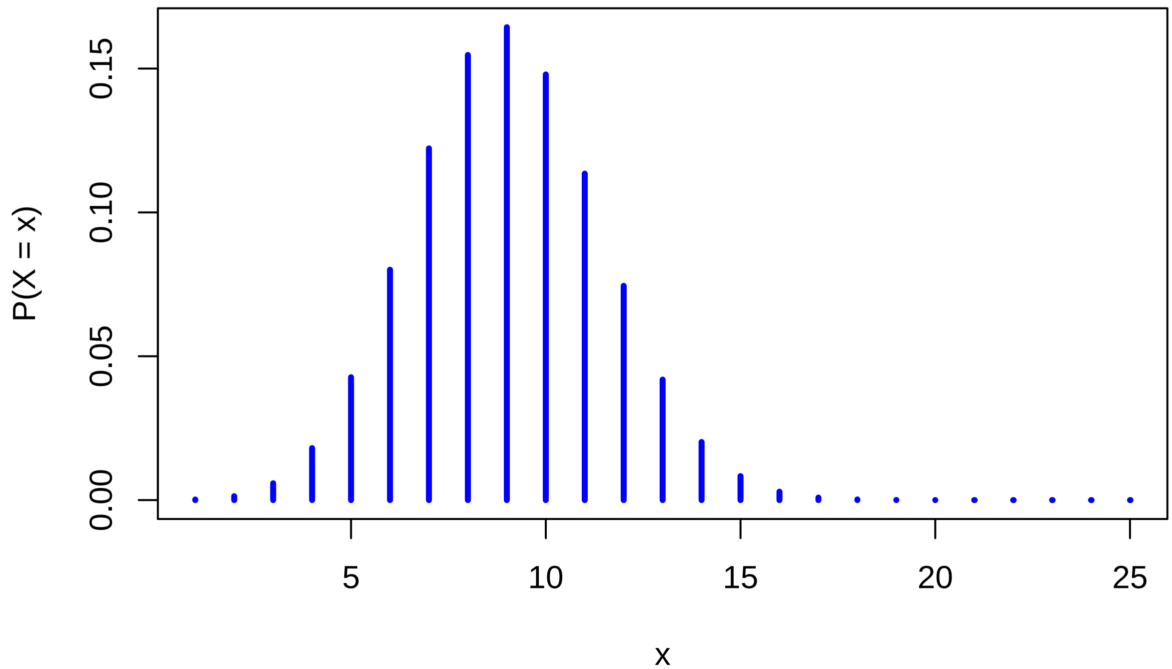
```
##
##  Estimativa de momentos = 0.3599944
```

(c) Utilizando a estimativa de θ do item anterior, apresente o gráfico da função massa de probabilidade de X.

A solução abaixo utiliza a função `dbinom` calculada com $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e dividindo as probabilidades pelo denominador em (1).

```r
ptrunc <- dbinom(1:n, n, tetam) / (1 - (1 - tetam)^n)

plot(ptrunc, type = "h", col = "blue", lwd = 3, xlab = "x", ylab = "P(X = x)")
```



11. Resolva o exercício 6 utilizando o método de máxima verossimilhança e represente graficamente a função log-verossimilhança.

A partir de (1) escrevemos a função log-verossimilhança

$$\ell(\theta) = \log\left(\binom{n}{x}\right) + x\log(\theta) + (n-x)\log(1-\theta) - \log\left(1-(1-\theta)^n\right),$$

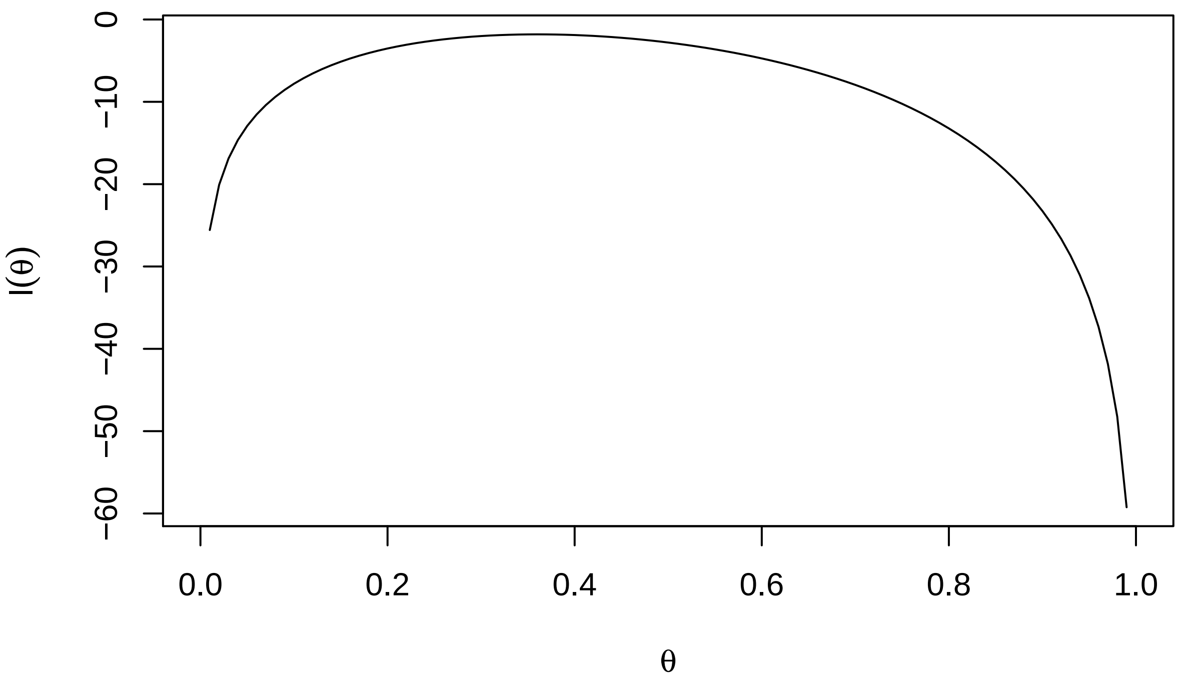
para $\theta \in (0,1)$ e $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Calculamos

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta} - \frac{n(1-\theta)^{n-1}}{1-(1-\theta)^n}.$$

A solução da equação de verossimilhança $\partial\ell(\theta)/\partial\theta = 0$ não é imediata. Em seguida apresentamos o gráfico da função log-verossimilhança.

```r
# Função log-verossimilhança
logver <- function(teta) {
  return(lchoose(n, x) + x * log(teta) + (n - x) * log(1 - teta) -
           log(1 - (1 - teta)^n))
}
curve(logver, xlab = expression(theta), ylab = expression(l(theta)))
```



O gráfico da função log-verossimilhança indica que o ponto de máximo é o único ponto crítico da função. A estimativa de máxima verossimilhança é calculada com a função `uniroot`.

```
# Equação de verossimilhança
eqver <- function(teta) {
   return(x / teta - (n - x) / (1 - teta) - n * (1 - teta)^(n - 1) /
      (1 - (1 - teta)^n))
}

# Estimativa de maxima verossimilhança
tetac <- uniroot(eqver, interval = c(0.01, 1))$root
cat("\n Estimativa de máxima verossimilhança =", tetac)
```

```
##
##  Estimativa de máxima verossimilhança = 0.3599973
```

Nota As estimativas de momentos e de máxima verossimilhança são semelhantes. Tente provar que os dois métodos são equivalentes.