

# Curvas e Superfícies

Robson Carlos da Motta

<sup>1</sup>Disciplina: Computação Gráfica

**Resumo.** Neste documento são apresentados conceitos de curvas e superfícies. Mais especificamente serão detalhados conceitos de continuidade em curvas, representação por conjunto de pontos e representações analíticas de curvas, e, por fim, representações e construção de superfícies.

## 1. Introdução

Curvas e superfícies são importantes em diversas áreas tanto na criação de objetos sintéticos quanto na visualização de fenômenos científicos. O estudo de curvas é a base na geração de formas mais simples ou objetos complexos, assim como para todo estudo de superfícies.

Uma simples representação de curva pode ser feita como uma sucessão de linhas retas, porém, curvas e superfícies complexas demandam uma maneira mais eficiente de representação. Na figura 1 há um exemplo de uma curva gerada pela ligação de pontos usando linhas retas, e na figura 2 é apresentada uma curva com uma quantidade inferior de pontos, porém, com uma representação mais eficiente, demonstrando algumas possibilidades de ligação entre pontos com curvas suavizadas.



Figura 1. Exemplo de geração de curva ligando pontos usando segmentos de reta.

Um exemplo de superfície é apresentado na figura 3, na qual duas superfícies são exibidas com o mesmo conjunto de pontos. De acordo com a técnica de geração de superfície utilizada, e também de acordo com o objetivo do usuário, é possível se obter objetos distintos a partir de um mesmo conjunto de pontos. De forma geral, podemos ver superfícies como uma generalização das curvas.

Os conceitos de curvas e superfícies descritos aqui, assim como as técnicas apresentadas, foram baseados no livro *Computação Gráfica - Teoria e Prática* de Eduardo Azevedo (Azevedo, 1997).

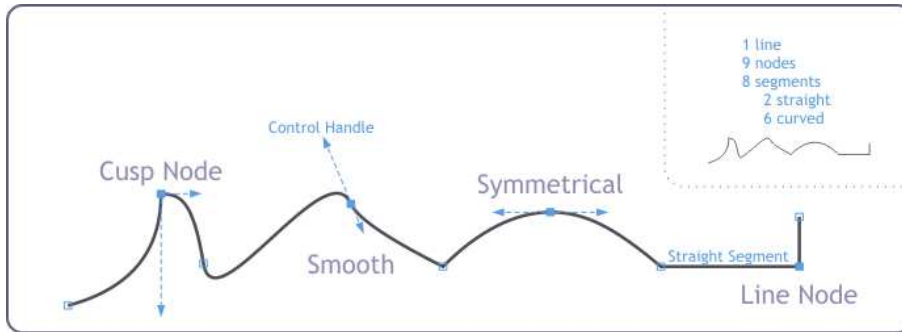


Figura 2. Possíveis suavizações na curva utilizando vetores tangentes aos pontos.

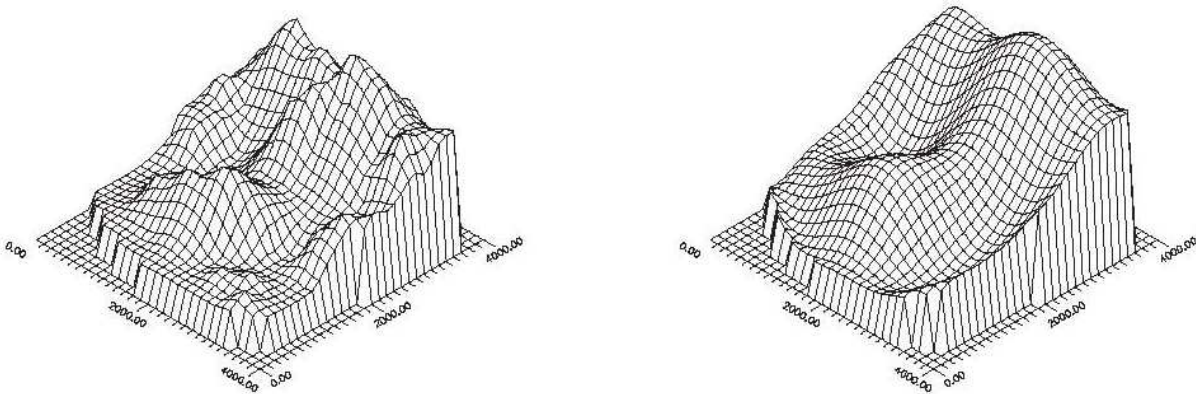


Figura 3. Duas diferentes superfícies para o mesmo conjunto de pontos.

## 2. Curvas

Em se tratando das curvas, a geração é feita baseada em alguns pontos já conhecidos. Considerando esses pontos há duas formas principais de geração da curva, a primeira é a geração de uma curva que passe por todos os pontos e a segunda a identificação da melhor curva que represente os pontos, independente de passar por eles ou não. Em ambos os casos vamos considerar o termo geração de curvas.

Uma questão importante no estudo de curvas (e também em superfícies) é sua continuidade nos pontos de junção. Uma continuidade de ordem 0 indica que a curva se encontra no ponto, de ordem 1 indica que há continuidade na derivada primeira, e de ordem 2 que há continuidade na derivada segunda. A figura 4 apresenta exemplo desses casos.

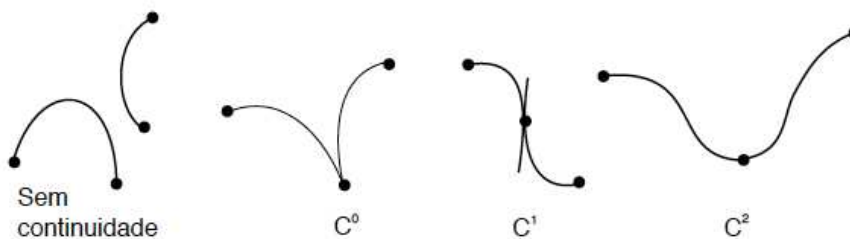


Figura 4. Exemplos de continuidade em curvas.

A seguir serão apresentados conceitos e técnicas de geração de curvas.

## 2.1. Conjunto de pontos

A representação mais simples de uma curva é a representação por conjunto de pontos. Nela simplesmente se considera uma curva como sendo um grande número de pontos, para os quais visualmente tenha a aparência de uma curva, ou pela conexão dos pontos considerando segmentos adequados.

Porém, para curvas acentuadas o uso de segmentos de retas pode não ser satisfatório, nesse caso é necessário obter mais pontos a partir do domínio em questão ou aumentar o número de pontos na região por interpolação ou aproximação.

Na figura 5 é mostrado um exemplo representado apenas com pontos e outro por segmentos de retas após obter novos pontos.

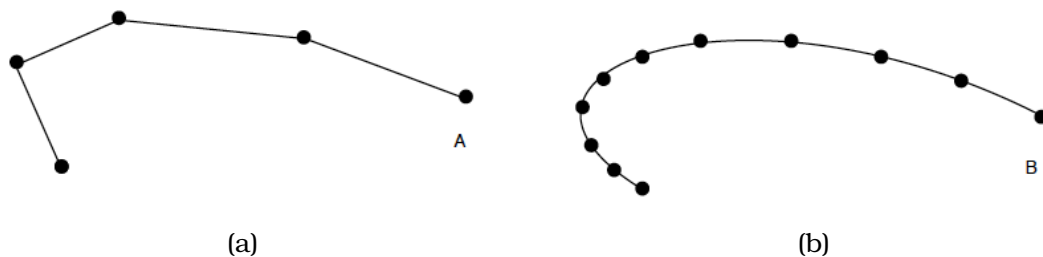


Figura 5. Geração de curvas considerando segmentos de retas entre dois conjuntos de pontos.

## 2.2. Representação analítica

As representações analíticas consideram uma ou mais equações para representar a curva. Essa forma é mais eficiente por ser mais precisa, devido a se ter a posição exata por onde a curva irá passar, mais compacta, por ser representada por equações, não necessita de área de armazenamento, pois não há necessidade de armazenar os pontos, e facilita o cálculo devido a cada ponto ser gerado diretamente da equação.

A representação analítica se divide em formas não paramétricas e as formas paramétricas, como veremos a seguir.

## 2.3. Formas não paramétricas de representar curvas

Nas representações não paramétricas a posição em  $y$  é dada como uma função de  $x$ , e vice-versa. Esta representação se divide em implícita e explícita.

Na forma explícita, como o próprio nome diz, dado explicitamente uma das posições se obtém um único valor para a outra posição, ou seja, dado o valor de  $y$  se obtém um valor para  $x$ . Como por exemplo na equação da reta (Equação 1).

$$y = 2x - 1 \quad (1)$$

Na forma implícita, cada valor de  $y$  pode gerar mais de um valor para  $x$ . Como por exemplo um círculo de raio  $r$  (Equação 2).

$$x^2 + y^2 - r^1 = 0 \quad (2)$$

Porém, se a curva for gerada fazendo o incremento de umas das dimensões é possível que a curva não se apresente distribuída uniformemente, ou seja, alguns pontos podem ficar mais espaçados dos que outros, como pode ser visto na figura 6, se incrementarmos o valor no eixo  $x$  unidade a unidade a distância entre os pontos no plano não é constante.

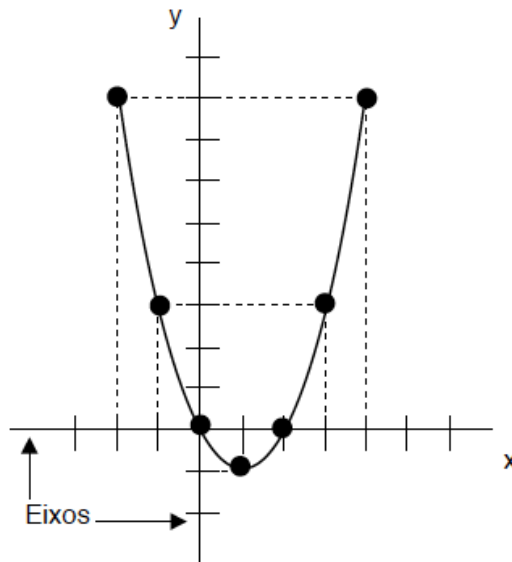


Figura 6. Pontos gerados incrementando o eixo  $x$  unidade a unidade, demonstrando espaçamento não uniforme entre os pontos.

Além disso, as formas não paramétricas são dependentes do sistema de coordenadas, sendo que o aumento do número de dimensões compromete a facilidade de seu uso.

Devido à essas limitações, é comum a utilização de representações paramétricas.

#### 2.4. Formas paramétricas de representar curvas

Na forma paramétrica, as coordenadas dos pontos são definidas utilizando-se um parâmetro. Um exemplo simples seria a equação da reta, vista anteriormente, utilizando-se um parâmetro  $t$  (Equação 3). Além disso, a forma paramétrica permite representar curvas fechadas e valores múltiplos.

$$\begin{aligned} x &= t + 1 \\ y &= 2t + 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Como a forma paramétrica necessita apenas do valor de parâmetro ela é independente do sistema de coordenadas, ou seja, para aumentar o número de dimensões basta incluir mais uma função para a nova coordenada.

O espaçamento entre os pontos, e o ponto inicial e final de cada curva, são definidos pelo intervalo de variação do parâmetro, que em geral é normalizado entre 0 e 1.

Agora, contendo um valor para a posição  $x$  e desejando obter a posição em  $y$ , é necessário substituir na função de  $x$ , obter o valor do parâmetro e o utilizar na função de  $y$ .

## 2.5. Curvas paramétricas cúbicas

Algumas curvas dificilmente podem ser descritas por expressões analíticas em toda sua extensão, sendo necessário realizar a união de pequenas curvas com continuidade desejada. Em geral são utilizadas pequenas curvas geradas com um polinômio cúbico aplicado a um conjunto de pontos de controle.

A equações 4 descrevem os polinômios cúbicos que definem um segmento de curva. De forma geral, uma curva paramétrica cúbica é gerada a partir de um parâmetro  $t$ , comumente normalizado entre 0 e 1, sendo cada ponto  $P$  no instante  $t$  dado como  $P(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)] = TC$ , com  $T$  descrito em 5 e  $C$  em 6:

$$\begin{aligned} x(t) &= P_x = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) &= P_y = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ z(t) &= P_z = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{aligned} \quad (4)$$

$$T = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \quad (5)$$

$$C = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

Sendo assim, é necessário definir a matriz de coeficientes  $C$  para se obter as coordenadas do ponto  $P$  em um instante  $t$ . Para isso,  $C$  é descrita como  $C = M G$ , com  $G$  sendo uma matriz  $3 \times 4$  contendo quatro elementos geométricos (cada técnica de geração de curva define seus elementos) e  $M$  sendo uma matriz base  $4 \times 4$  obtida de acordo com os valores de  $G$ .

Por fim, a forma geral de uma curva é definida em 7.

$$P(t) = T M G \quad (7)$$

As curvas paramétricas cúbicas mais conhecidas são as curvas de Hermite, Bézier e B-Spline. Na figura 7 há um exemplo de uma curva Bézier com 7 pontos de controle, na qual são geradas duas curvas, a primeira de P0 até P3 e a segunda de P3 até P6, mais detalhes das técnicas serão vistos a seguir.

### 2.5.1. Hermite

Para geração de uma curva de Hermite são considerados 4 fatores, que são dois pontos de controle, P1 e P2, e dois vetores tangentes a curva, T1 e T2 (Figura 8). Esses são os quatro elementos formadores da matriz  $G$ .

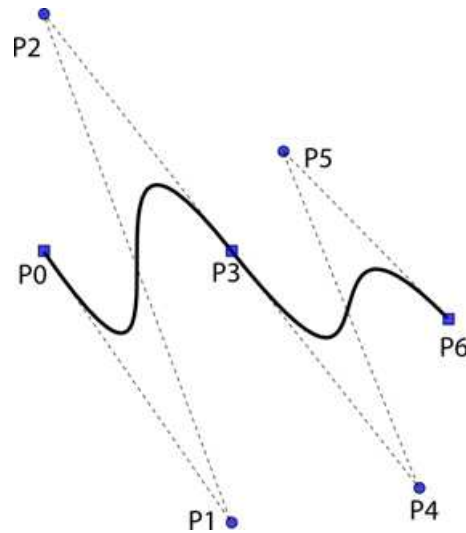


Figura 7. Exemplo de duas curvas Bézier com o ponto  $P3$  em comum (término da primeira curva e início da segunda).

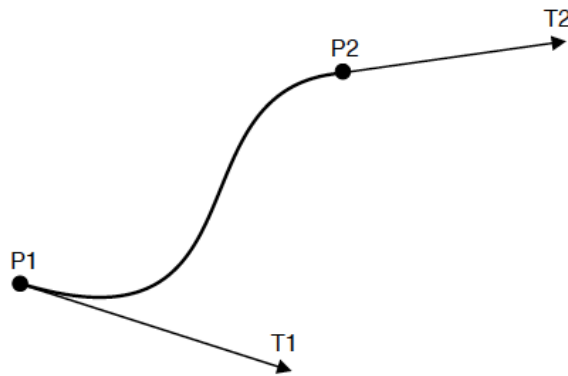


Figura 8. Exemplo de curva de Hermite, na qual  $P1$  e  $P2$  são os pontos e  $T1$  e  $T2$  os vetores tangentes à curva.

Porém, além da matriz  $G$  também é necessária a matriz  $M$ , mas antes são necessárias algumas definições. Primeiro, considerando o parâmetro  $t$  normalizado entre 0 e 1, com 0 o instante no ponto  $P1$  e 1 no ponto  $P2$ , o instante  $t$  descreve a posição do ponto na curva, mantendo a distância igual entre mesmos intervalos de  $t$  (Figura 8).

Também é necessário descrever os vetores  $T1$  e  $T2$ , que, de forma geral, são descritos nas equações 8 considerando que satisfazem as condições vetoriais da curva, e têm a direção relacionada a tangente.

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= 3a_x t^2 + 2b_x t + c_x \\
 y'(t) &= 3a_y t^2 + 2b_y t + c_y \\
 z'(t) &= 3a_z t^2 + 2b_z t + c_z
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Como  $P1$  e  $T1$  são obtidos no instante  $t = 0$  e  $P2$  e  $T2$  no instante  $t = 1$  é possível criar a equação 9 que será usada para se obter a matriz  $M$ .

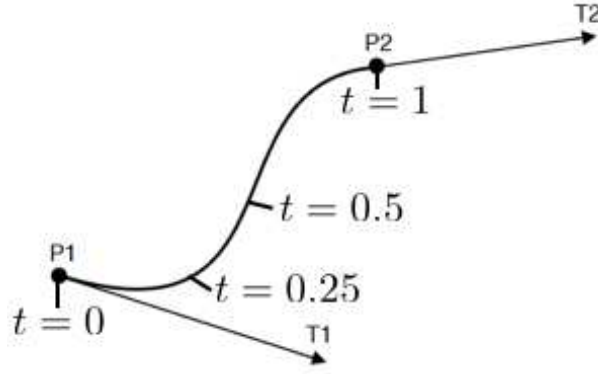


Figura 9. Curva de Hermite com indicação do local onde o ponto estará no instante  $t$ .

$$\begin{bmatrix} P1_x & P1_y & P1_z \\ P2_x & P2_y & P2_z \\ T1_x & T1_y & T1_z \\ T2_x & T2_y & T2_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

Considerando a equação 9 como  $A = B^{-1}C$  é possível simplificar para  $BA = C$  após inserir  $B$  multiplicando os dois lados  $BA = BB^{-1}C$ , obtendo a equação 10.

$$\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1_x & P1_y & P1_z \\ P2_x & P2_y & P2_z \\ T1_x & T1_y & T1_z \\ T2_x & T2_y & T2_z \end{bmatrix} \quad (10)$$

Lembrando que  $C = MG$ , na equação 10 já estão descritas as duas matrizes,  $M$  e  $G$ , para a curva de Hermite. Substituindo na forma geral  $P(t) = T M G$ , se obtém a equação 11, também podendo ser descrita como na equação 12.

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1_x & P1_y & P1_z \\ P2_x & P2_y & P2_z \\ T1_x & T1_y & T1_z \\ T2_x & T2_y & T2_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$P(t) = ((2t^3 - 3t^2 + 1), (-2t^3 + 3t^2), (t^3 - 2t^2 + t), (t^3 - t^2)) \begin{bmatrix} P1_x & P1_y & P1_z \\ P2_x & P2_y & P2_z \\ T1_x & T1_y & T1_z \\ T2_x & T2_y & T2_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

Exemplos de diferentes resultados obtidos alterando apenas o vetor  $T1$  são apresentados na figura 10. Lembrando que, para as curvas Hermite, a ordem da continuidade está relacionada com a definição dos vetores.

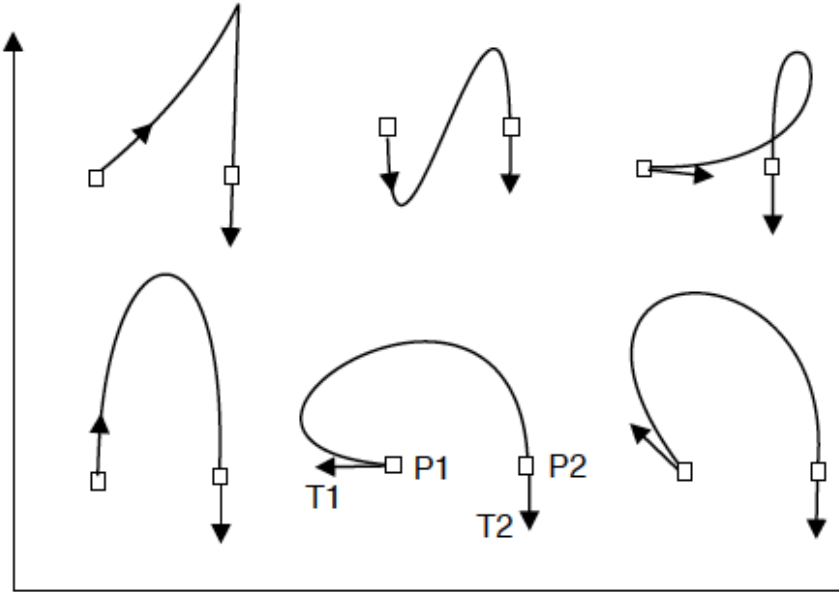


Figura 10. Exemplo de diferentes curvas formadas alterando-se apenas o vetor  $T1$ .

### 2.5.2. Bézier

A idéia de criação de curvas Bézier é semelhante à das curvas Hermite, porém, no lugar de dois vetores tangentes são utilizados pontos intermediários que determinarão a forma da curva. A curva de Bézier pode ser gerada por um polinômio de grau  $n$ , mas em geral utiliza-se sua forma cúbica, necessitando de 4 pontos de controle, dois extremos e dois intermediários.

Para um polinômio de grau  $n$ , o ponto  $P$  no instante  $t$  é dado pela equação 13, na qual  $P_i$  são os pontos de controle e  $J_{3,1}(t)$  é a função que combina os pontos, descrita pelos polinômios de Bernstein 14.

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i J_{n,i}(t) \quad (13)$$

$$J_{m,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (14)$$

A equação 13, para polinômios de grau 3, também pode ser descrita como na equação 15, e a equação 16 descreve a curva de Bézier em sua forma geral  $P(t) = T M G$ .

$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 \quad (15)$$



$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0x} & P_{0y} & P_{0z} \\ P_{1x} & P_{1y} & P_{1z} \\ P_{2x} & P_{2y} & P_{2z} \\ P_{3x} & P_{3y} & P_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Observe que a matriz  $G$  contém agora os 4 pontos, enquanto nas curvas de Hermite havia dois pontos e dois vetores.

Uma das propriedades das curvas de Bézier é a propriedade normalizante da equação de Bernstein, na qual o somatório para todos os pontos é igual a 1 (equação 17), para  $t$  variando de 0 a 1, fazendo com que a curva se mantenha dentro da figura convexa formada pelos pontos (figura 11).

$$\sum_{i=0}^n J_{n,i}(t) = 1, 0 \leq t \leq 1 \quad (17)$$

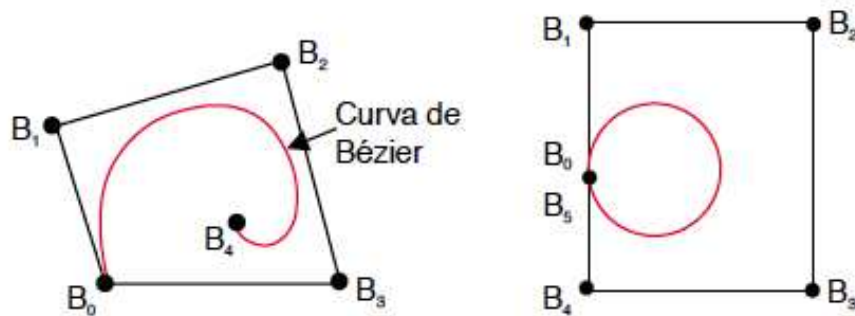


Figura 11. Exemplos da curva Bézier se mantendo no fecho convexo dos pontos de controle.

Para as curvas de Bézier, a ordem da continuidade depende da localização dos pontos, sendo que para haver continuidade  $C^1$  ou  $C^2$  é necessário que haja três pontos em uma linha reta, que são os dois últimos pontos da primeira curva e os dois primeiros pontos da segunda curva, sendo que o último da primeira curva e o primeiro da segunda curva é o mesmo ponto. Devido a isso, para se obter continuidade  $C^1$  ou  $C^2$  é comum a geração de um novo ponto forçando haver três em linha reta.

### 2.5.3. B-Spline

O nome Spline faz alusão ao termo da língua inglesa utilizado para denominar régua flexível usada em desenhos para gerar curvas suaves, de classe  $C^2$ . Na qual a alteração em qualquer ponto afeta a curva toda.

A curva B-Spline é uma “versão” da Spline, com controle local, ou seja, as alterações em um ponto afetam apenas os vizinhos mais próximos. Além disso, as curvas B-Spline não necessariamente passam por algum ponto de controle, como pode ser visto no exemplo da figura 13.

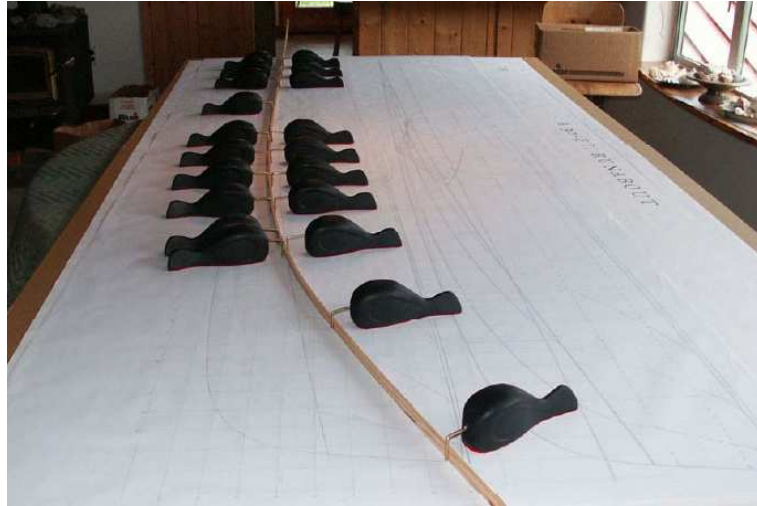


Figura 12. Spline, régua flexível usada em desenhos de curvas suaves.

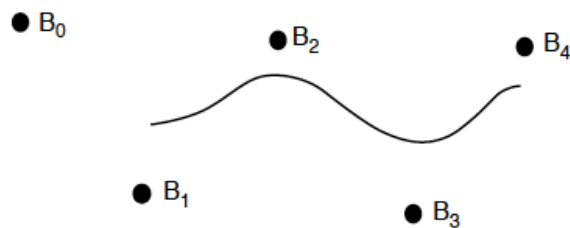


Figura 13. Exemplo de uma curva B-Spline com 5 pontos de controle.

A curva pode ser gerada com qualquer grau de polinômio independente do número de pontos de controle, mas afetando a continuidade, sendo que para um grau de polinômio  $k$  será obtido continuidade  $k - 1$ .

A geração da curva é bem semelhante a curva de Bézier, um conjunto de funções combinam os pontos de controle para gerar a curva (equação 18, com  $n + 1$  igual ao número de pontos de controle, e  $k$  o grau do polinômio). Porém, no caso da B-Spline, a função de combinação dos pontos é recursiva (equações 19 e 20).

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t) \quad (18)$$

$$N_{i,1}(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ para } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 \text{ nos demais intervalos} \end{array} \right\} \quad (19)$$

$$N_{i,k}(t) = \left( \frac{1 - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \right) N_{i,k-1}(t) + \left( \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right) N_{i+1,k-1}(t) \quad (20)$$

Para uma curva B-Spline o parâmetro  $t$  é chamado vetor de nós, e, devido a recursividade da função, a definição dos valores influencia na formação da curva. Além disso, os nós podem ser classificados como “uniformes e periódicos”, “uniformes e não-periódicos” e “não-uniformes”.

Uma curva com nós periódicos só vai passar pelos pontos inicial e final se o grau for igual a 1, a curva tracejada na figura 14. Para a curva de grau 2, se começa no ponto médio da reta que une os dois primeiros pontos, e termina no ponto médio dos dois pontos finais. Conforme o grau aumenta, os limites da curva diminuem, deixando-a menor.

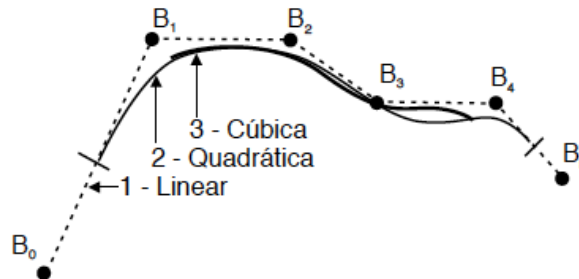


Figura 14. Curvas B-Spline geradas por um vetor de nós uniformes e periódicos.

Para as curvas com vetor de nós “uniformes e não-periódicos”, a curva não diminui seus limites como ocorria no caso anterior, sempre iniciando no primeiro ponto e terminando no último (figura 15).

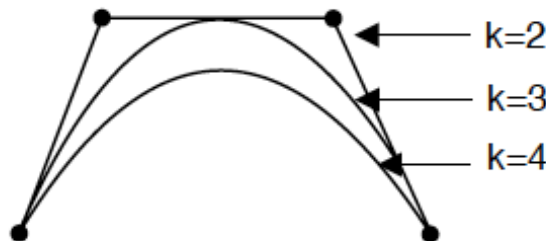


Figura 15. Curvas B-Spline geradas por um vetor de nós uniformes e não-periódicos.

Embora nós com espaçamento uniforme sejam mais simples, o uso de espaçamento não uniforme é útil para um controle mais preciso da forma da curva, possibilitando regiões da curva com características diferentes (figura 16).

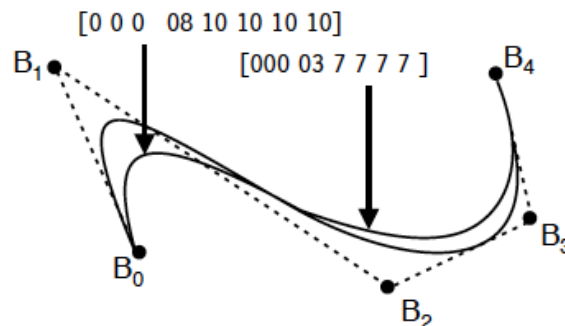


Figura 16. Curvas B-Spline geradas por um vetor de nós não-uniformes.

### 3. Superfícies

De forma geral, as superfícies são uma generalização das curvas. Sendo assim, também podem ser geradas por um conjunto de pontos, ter representação analítica, explícita ou implícita, paramétrica ou não paramétrica.

Exemplos de superfícies são apresentados na figura 17.

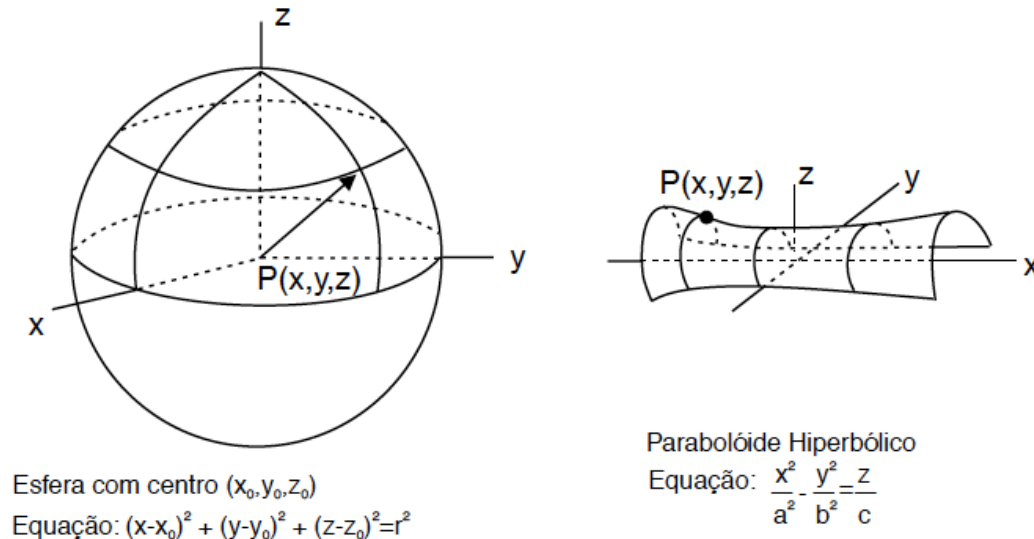


Figura 17. Exemplos de superfícies.

#### 3.1. Superfícies de revolução

Uma família bem conhecida de superfícies é a por revolução, a qual consiste em rotacionar uma curva plana em torno de um eixo. Na figura 18 é apresentada uma superfície cônica ao girar um segmento de reta em 360 graus no eixo  $z$ .

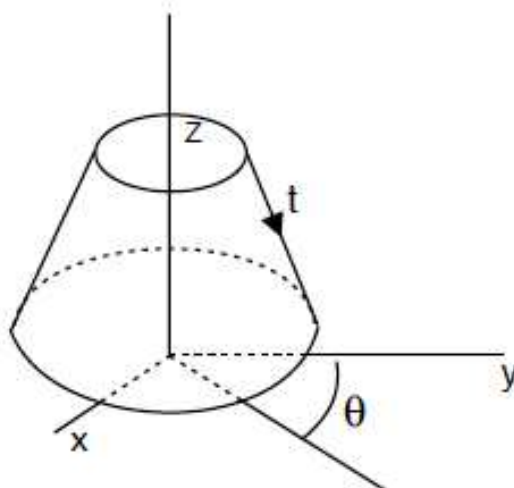


Figura 18. Superfície de revolução, gerada pela curva  $t$  rotacionada no eixo  $z$ .

Portanto, é possível gerar diferentes superfícies ao usar várias curvas, ângulos e eixos de rotações. Sendo cada ponto da superfície obtido utilizando

uma função de dois parâmetros, o ângulo de rotação e uma posição na curva  $t$  a ser rotacionada. Na figura 18 um ponto do segmento da curva no plano  $x = 0$  é dado pela equação 21, e quando rotacionado em torno do eixo  $z$  é dado pela equação 22. De uma forma geral, um ponto é descrito como  $P(t, \theta)$ .

$$P(t) = [0, y(t), z(t)] \quad (21)$$

$$P(t) = [y(t)\text{sen}\theta, y(t)\text{cos}\theta, z(t)] \quad (22)$$

### 3.2. Superfícies geradas por deslocamento

Superfícies geradas por deslocamento é o procedimento de construir uma superfície ao mover uma curva ou figura plana ao longo de um caminho. Ou seja, são superfícies geradas a partir de translações e deslocamentos genéricos. A geração por rotação, vista anteriormente, é um caso particular de superfície por deslocamento.

Sendo um ponto de curva descrito por  $C(t)$  e um ponto do movimento que a curva fará descrito por  $M(s)$ , o ponto da superfície gerada será dado pela equação 23, com  $\times$  sendo o produto cartesiano das duas curvas. Um exemplo é mostrado na figura 19.

$$P(t, s) = C(t) \times M(s) \quad (23)$$

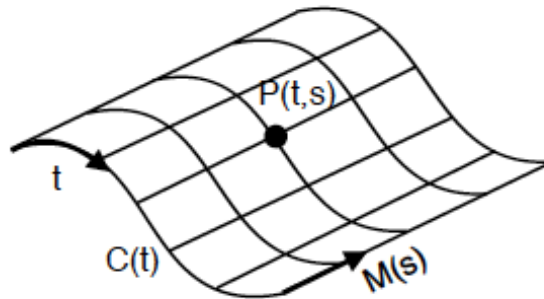


Figura 19. Superfície gerada por deslocamento, com a curva  $C(t)$  se movendo na reta  $M(s)$ .

### 3.3. Superfícies geradas por interpolação bi-linear

Geração da superfície a partir dos pontos ou curvas que descrevem seus limites. É uma das formas mais empregadas onde há necessidade de discretização de domínios (elementos finitos ou de contorno).

A forma mais simples é considerar o espaço dos parâmetros representados por uma área delimitada pelos pontos  $(0,0);(0,1);(1,0);(1,1)$ . Sendo assim, para se gerar uma superfície a partir de quatro pontos A, B, C e D, deve-se associar esses pontos aos limites e gerar o interior usando interpolações lineares sucessivas. Na primeira interpolação se obtém o ponto E e F (equações 24 e 25), considerando as retas AD e BC, que correspondem aos limites com parâmetro  $u = 0$  e  $u = 1$  (figura 20).

$$E = (1 - v)A + vD \quad (24)$$

$$F = (1 - v)B + vC \quad (25)$$

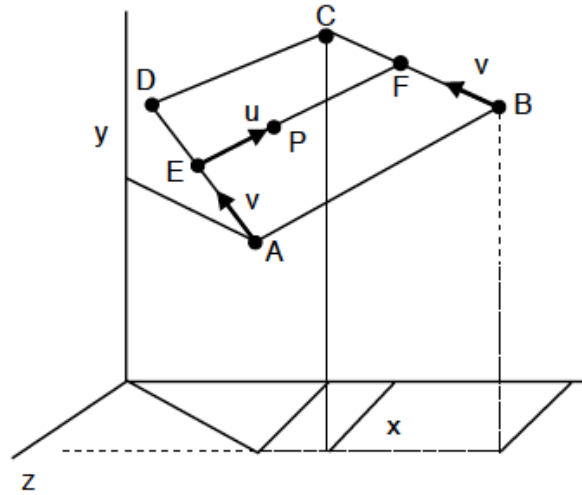


Figura 20. Mapeamento para geração de uma superfície por interpolação bi-linear, com fronteiras representadas por retas.

Com os pontos E e F é possível utilizar outra interpolação linear para gerar um ponto na superfície, considerando o parâmetro  $u$  (equação 26). E reunindo todas as expressões anteriores, o resultado de um ponto na superfície é dado pela equação 27.

$$P(u, v) = (1 - u)E + uF \quad (26)$$

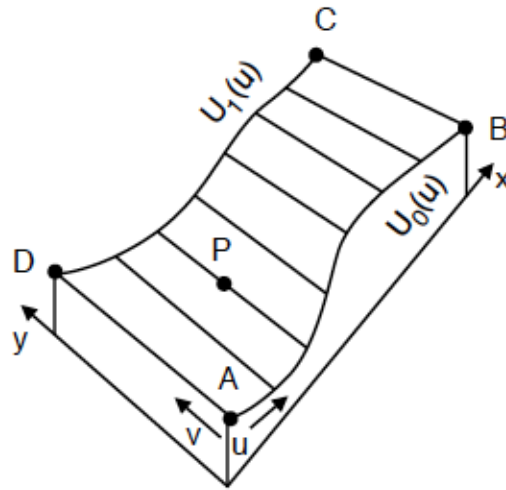
$$P(u, v) = (1 - u)(1 - v)A + (1 - u)vD + u(1 - v)B + uvC \quad (27)$$

Se as fronteiras forem definidas por curvas, a interpolação resultante será linear a partir das curvas das fronteiras. Sendo que as outras fronteiras limitantes serão retas (figura 21). Assim, é necessário utilizar a expressão dessas curvas para gerar os pontos E e F.

No caso do limite ser quatro curvas, a interpolação de Coons (Coons, 1974) é usado para resolver o problema, conhecido como retalho de Coon, interpolação de Coon ou Coons *Patches*.

### 3.4. Superfícies paramétricas bicúbicas

As superfícies bicúbicas são uma generalização das curvas cúbicas, ou seja, superfícies quadrilaterais formadas por curvas cúbicas. Essa representação permite criar uma infinidade de formas apenas alterando as expressões que representam as fronteiras ou os pontos de controle.



$$P(u,v) = (1-v) U_0(u) + v U_1(u)$$

Figura 21. Geração de superfície bi-linear com fronteiras AB e CD representadas por curvas.

Estas superfícies são descritas como na equação 28, contendo um parâmetro a mais que nas curvas cúbicas, mas a mesma estrutura, a qual considera os pontos de controle e a função de combinação dos pontos, utilizada para cada parâmetro.

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_i(u) B_j(v) \quad (28)$$

Como vantagem há a facilidade de cálculo de diversas propriedades, como massa, volume e área, devido a ser descrito por formulações matemáticas. Porém, pode-se encontrar dificuldades para manter a suavidade ao alterar determinados pedaços, e, além disso, necessidade de um alto tempo para geração de uma visualização realística (render) e memória para objetos complexos.

Assim como nas curvas, as principais superfícies bicúbicas são as superfícies de Hermite, Bézier e Spline. Ou seja, superfícies nas quais as curvas de contorno são definidas por essas curvas.

A representação matricial para essas superfícies, bem semelhante à representação das curvas, é dada pela equação 29 com  $S = [s^3, s^2, s, 1]$ ,  $T = [t^3, t^2, t, 1]$ , o índice  $T$  indica a matriz e vetor transpostos e a matriz  $G_h$  as condições geométricas que definirão a superfícies.

$$P(s, t) = S H G_h H^T T^T \quad (29)$$

Observe que agora a matriz geométrica não conterà apenas os 4 elementos necessários para a curva. No caso de uma superfície Hermite, irá conter os 4 pontos limites, suas derivadas em relação a  $s$ , suas derivadas em relação a  $t$  e suas derivadas cruzadas. Diferentes superfícies são obtidas variando-se os pontos de controle, os vetores tangentes, ou as derivadas cruzadas (figura 22).

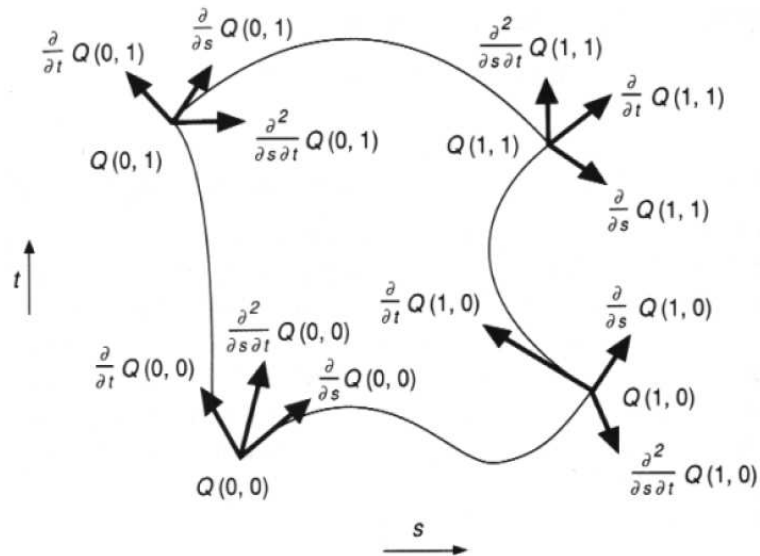


Figura 22. Pontos e vetores em uma superfície de Hermite.

As superfícies de Bézier, as quais possuem curvas de contorno definidas pelas expressões de Bézier, mapeiam  $G_h$  considerando os 16 pontos de controle, como demonstrado na figura 23. O mesmo acontece com as superfícies B-Spline, com  $G_h$  formada pelos pontos de controle.

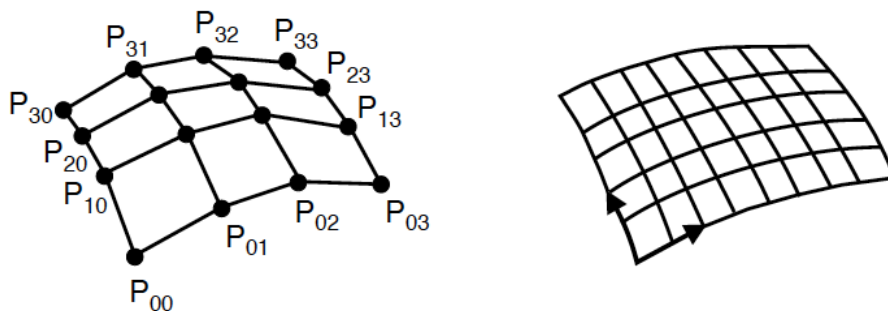


Figura 23. Pontos de controle e geração de uma superfície Bézier.

Para as curvas de Bézier, a continuidade em um ponto que ligava duas curvas dependia de haver três pontos em linha reta, sendo o próprio ponto, seu antecessor e seu sucessor. No caso de superfícies, a continuidade em pontos intermediários de uma fronteira continua com a mesma dependência, três pontos. E considerando a continuidade em pontos nos extremos das fronteiras, a continuidade depende de dois grupos de 3 pontos, um em cada direção, totalizando cinco pontos.

## Referências

- Azevedo, E. (1997). *Computação Gráfica - Teoria e Prática*. Editora CAMPUS.
- Coons, S. A. (1974). Surface patches and b-spline curves. In *Computer Aided Geometric Design* (ed. Barnhill and Riesenfeld), pp. 1-16.