$4^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE INT. À INF. ESTATÍSTICA - SME 0122

Exercício 1. Uma variável de Bernoulli com probabilidade de sucesso p é amostrada, de forma independente, duas vezes. Apresente a função de probabilidade da média amostral.

Exercício 2. O número de divórcios, por indivíduo adulto casado, em certa comunidade foi modelado pela variável aleatória D, cuja função de probabilidade é apresentada a seguir Uma

D	0	1	2	3
p_i	0,5	0,4	0,05	0,05

amostra, representada por (D_1, D_2), foi sorteada com dois desses indivíduos e os seguintes estimadores, para a média de divórcios, foram considerados: $\hat{\mu}_1 = \sqrt{D_1 D_2}$ e $\hat{\mu}_2 =$ máximo - mínimo. Para cada estimador, obtenha sua distribuição de probabilidade e verifique se é viciado.

Exercício 3. Coleta-se uma amostra de 10 observações independentes de uma $N(2, 2)$. Determine a probabilidade de a média amostral

- **(a)** ser inferior a 1.
- **(b)** Ser superior a 2,5.
- **(c)** Estar entre 0 e 2.

Exercício 4. Supõe-se que o consumo mensal de água por residência em um certo bairro paulistano tem distribuição Normal com média 10 e desvio padrão 2 (em m^3). Para uma amostra de 25 dessas residências, qual é a probabilidade de a média amostral não se afastar da verdadeira média por mais de 1 m^3?

Exercício 5. Um fabricante afirma que sua vacina contra a gripe imuniza em 80% dos casos. Uma amostra de 25 indivíduos que tomaram a vacina foi sorteada e testes foram feitos para verificar a imunização ou não desses indivíduos. Se o fabricante estiver correto, qual é a probabilidade da proporção de imunizados na amostra ser inferior a 0,75? E superior a 0,85?

Exercício 6. Uma máquina de empacotar um determinado produto o faz segundo uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão 10 g.

- **(a)** Em quanto deve ser regulado o peso médio μ para que apenas 10% dos pacotes tenham menos do que 500g?
- **(b)** Com a máquina assim regulada, qual a probabilidade de que o peso total de 4 pacotes escolhido ao acaso seja inferior a 2kg?

Exercício 7. A capacidade máxima de um elevador é de 500 kg. Se a distribuição X dos pesos dos usuários for suposta $N(70, 100)$:

- **(a)** Qual é a probabilidade de sete passageiros ultrapassarem esse limite?
- **(b)** E seis passageiros?

Exercício 8. Sabe-se que 20% das peças de um lote são defeituosas. Sorteiam-se oito peças, com reposição, e calcula-se a proporção $\hat{p}$ de peças defeituosas na amostra.

- **(a)** Construa a distribuição exata de $\hat{p}$ (use a tábua da distribuição binomial).
- **(b)** Construa a aproximação normal à binomial.
- **(c)** Segundo sua opinião, a segunda distribuição é uma boa aproximação da primeira?
- **(d)** Já sabemos que, para dado p fixo, a aproximação melhora à medida que n aumenta. Agora, se n for fixo, qual valor de p a aproximação é melhor?

Exercício 9. Um procedimento de controle de qualidade foi planejado para garantir um máximo de 10% de itens defeituosos na produção. A cada 6 horas sorteia-se uma amostra de 20 peças e, havendo mais de 15% de defeituosos, encerra-se a produção para verificação do processo. Qual a probabilidade de uma parada desnecessária?

Exercício 10. Consideramos duas populações X com parâmetros μ_1 e σ_1^2 e Y com parâmetros μ_2 e σ_2^2. Sorteiam-se duas amostras independentes: a da primeira população de tamanho n e a da segunda de tamanho m. Calculam-se as médias amostrais $\bar{X}$ e $\bar{Y}$.

- **(a)** Qual a distribuição de $\bar{X}$? E de $\bar{Y}$?
- **(b)** Defina $D = \bar{X} - \bar{Y}$. O que você entende por distribuição amostral de D?
- **(c)** Calcule $\mathrm{E}(D)$ e $\mathrm{Var}(D)$.
- **(d)** Como supõe que é a distribuição de D? Por quê?

Exercício 11. A distribuição dos salários (em salários mínimos) de operários do sexo masculino de uma grande fábrica é $N(5,4; 1,69)$, e a de operários do sexo feminino é $N(5,4; 2,25)$. Sorteiam-se duas amostras, uma com 16 homens e outra com 16 mulheres. Se D for a diferença entre o salário médio dos homens e das mulheres:

- **(a)** Calcule $P(|D| > 0,5)$.
- **(b)** Qual o valor de d tal que $P(|D| > d) = 0,05$
- **(c)** Que tamanho comum deveriam ter ambas as amostras para que $P(|D| > 0,4) = 0,05$?

Exercício 12. Suponha um experimento consistindo de n provas de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p. Seja X o número de sucessos, e considere os estimadors

$$\hat{p}_1 = X/n \quad \text{e} \quad \hat{p}_2 = \begin{cases} 1, & \text{se a primeira prova resultar sucesso} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a esperança e a variância de cada estimador. Por que $\hat{p}_2$ não é um "bom"estimador? São estimadores consistentes?

Exercício 13. Se X é uma variável aleatória binomial, mostre que

- **(a)** $\hat{p}_1 = X/n$ é um estimador não viciado de p.
- **(b)** $\hat{p}_2 = \frac{X+\sqrt{n}/2}{n+\sqrt{n}}$ é um estimador viciado de p.
- **(c)** Mostre que o estimador $\hat{p}_2$ se torna não viciado quando $n \to \infty$.

Exercício 14. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a.s. de uma população com distribuição Poisson(θ). Verifique se o estimador $\bar{X}$ do parâmetro θ é não viciado.

Exercício 15. Para estimar a média μ desconhecida de uma população, foram propostos dois estimadores não viesados e independentes $\widehat{\mu}_1$ e $\widehat{\mu}_2$, de tal forma que $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}_1) = \mathrm{Var}(\widehat{\mu}_2)/3$, Considere os seguintes estimadores ponderados de μ:

- **(a)** $\widehat{\mu}_3 = (\widehat{\mu}_1 + \widehat{\mu}_2)/2$.
- **(b)** $\widehat{\mu}_4 = (4\widehat{\mu}_1 + \widehat{\mu}_2)/5$.
- **(c)** $\widehat{\mu}_5 = \widehat{\mu}_1$.
- **(i)** Quais dos estimadores $\widehat{\mu}_3$, $\widehat{\mu}_4$ e $\widehat{\mu}_5$ são não viesados?
- **(ii)** Disponha esses estimadores em ordem crescente de eficiência.

Exercício 16. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a.s. de uma população com função densidade de probabilidade

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, \ 0 \le x \le 1, 0 \le \theta < \infty.$$

Encontre o estimador pelo método dos momentos de θ.