```latex
\documentclass[12pt]{article}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage{amsmath,amssymb,bm,indentfirst}
\renewcommand{\baselinestretch}{1.1}
\newcommand{\iid}{\ensuremath{\stackrel{\mbox{\footnotesize iid}}{\sim}}}
\newcommand{\ind}{\ensuremath{\stackrel{\mbox{\footnotesize indep.}}{\sim}}}
\hoffset=-0.675in
\advance\topmargin by -1in
\oddsidemargin=0.675truein
\evensidemargin=0.675truein
\advance\textheight by 1.25truein
\setlength\textwidth{6.5in}
\vsize=9.0in
\begin{document}
\thispagestyle{empty}
\begin{center}
PIPGEs ICMC -- USP/UFSCar \\
EST5102 -- Inferência Estatística -- 2024/1 \\
3$^{\b{a}}$ lista de exercícios
\end{center}
\begin{enumerate}
\item Considere $X_1,\ldots,X_n$ uma amostra aleatória de cada uma das
distribuições abaixo. A\-pre\-sente os respectivos estimadores de
máxima verossimilhança.
\begin{enumerate}
\item $\textsf{gama}(\alpha,\beta)$, $\alpha$ conhecido,
\item $\textsf{gama}(\alpha,\beta)$, $\beta$ conhecido,
\item $\textsf{gama}(\alpha,\beta)$ e
\item $\textsf{beta}(\alpha, \beta)$.
\end{enumerate}
\item Sejam $X_1,\ldots,X_n \iid \textsf{uniforme}([-\theta,\theta])$,
$\theta > 0$.
\begin{enumerate}
\item Apresente um estimador de $\theta$ pelo método de máxima
verossimilhança.
\item Apresente um estimador de $\theta$ pelo método dos momentos.
\end{enumerate}
\item Sejam
$X_1,\ldots,X_n \iid \textsf{uniforme}([\theta - 1/2, \theta +
1/2])$, $\theta \in \mathbb{R}$. Apresente um estimador de $\theta$
pelo método de máxima verossimilhança. Existe um \'unico estimador?
\item Sendo $X_1 \sim \textsf{normal}(\mu,\sigma^2)$, prove que não
existem estimadores de máxima verossimilhança de $\mu$ e $\sigma^2$.
\item Sejam $X_1,\ldots,X_n \iid f(\cdot;\theta)$, em que
```

```latex
$f(x;\theta) = \theta^x \, (1-\theta)^{1-x} \, I_{\{0,1\}}(x)$,
$0 < \theta \leq 1/2$. A\-pre\-sente (e comente) estimadores de
$\theta$ utilizando os métodos dos momentos e de máxima
verossimilhança.
\item Suponha que tempos de falha de um componente ($X$, em meses)
seguem distribuição $\textsf{exponencial}(\theta)$. Foi coletada uma
amostra aleatória de $X_1,\ldots,X_n$.
\begin{enumerate}
\item Apresente dois estimadores de $\theta$ pelo método dos
momentos.
\item Apresente o estimador de máxima verossimilhança de
$P_\theta(X_1 \geq 1)$.
\end{enumerate}
\item Sejam $X_1,\ldots,X_n \iid f(\cdot; \bm \theta)$, em que
$f(x; \bm \theta) = \sigma^{-1} \exp\{-(x-\mu)/\sigma\} \,
I_{[\mu,\infty)}(x)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e
$\bm \theta = (\mu, \sigma)^\top$.
\begin{enumerate}
\item Encontre estimadores de máxima verossimilhança de $\mu$ e
$\sigma$.
\item Proponha um estimador para $P_{\bm \theta}(X_1 \geq t)$,
$t > \mu$.
\end{enumerate}
\item Sejam $X_1,\ldots,X_m \iid \textsf{normal}(\mu_X,\sigma^2)$ e
$Y_1,\ldots,Y_n \iid \textsf{normal}(\mu_Y,\sigma^2)$ amostras
independentes. Encontre estimadores de máxima verossimilhança de
$\mu_X$, $\mu_Y$ e $\sigma^2$.
\item Considere $X_i \ind \textsf{normal}(\mu,\sigma^2 + \kappa_i)$,
$\kappa_i > 0$, $\kappa_i$ conhecida, $i=1, \ldots, n$.
\begin{enumerate}
\item Proponha estimadores de $\mu$ e $\sigma^2$ pelos métodos dos
momentos e de máxima verossimilhança.
\item Aplique os resultados do item anterior aos dados da amostra
\begin{align*}
\bm{x} & = (4,2; 5,7; 5,3; 9,6; 14,0; 7,1; 14,9; 9,1; 4,6; 1,3;
8,4; 4,1; 6,1; 3,0; 9,9; \\
& \quad 4,1; 9,7; 12,4; 11,4; 4,9)^\top,
\end{align*}
sendo que
\begin{align*}
\bm{\kappa} & = (2,7; 1,5; 3,6; 2,9; 0,9; 3,1; 4,7; 3,8; 2,1; 2,1;
3,0; 4,2; 5,9; 3,6; 3,1; \\
& \quad 2,5; 3,2; 0,9; 4,3; 2,9)^\top.
\end{align*}
\end{enumerate}
```

```
\item Uma amostra aleat\'oria \'e obtida de uma distribui\c c\~ao
\textsf{Poisson}$(\theta)$, mas os valores nulos n\~ao s\~ao
registrados. Dizemos que a distribui\c c\~ao \'e truncada na origem
ou em $0$.
\begin{enumerate}
\item Apresente um estimador de $\theta$ por m\'axima
verossimilhan\c ca.
\item Com base nas observa\c c\~oes
$\bm x = (5, 7, 2, 6, 3, 2, 4, 4, 1, 5)^\top$, apresente uma
estimativa para $\theta$.
\end{enumerate}
\item Sejam $X_1,\ldots,X_n \iid \textsf{normal}(\theta, |\theta|)$,
$\theta \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
\begin{enumerate}
\item \label{itmv} Apresente o estimador de m\'axima verossimilhan\c
ca de $\theta$.
\item Apresente estimadores de momentos para $\theta$ usando os dois
primeiros momentos.
\item Selecione o verdadeiro valor de $\theta$ $(= \theta_0)$ e o
tamanho da amostra, gere uma amostra aleat\'oria, represente
graficamente a fun\c c\~ao log-verossimilhan\c ca $\ell(\theta)$ e
verifique a solu\c c\~ao obtida no item \ref{itmv}.
\end{enumerate}
\end{enumerate}
\end{document}
```