SME0320 ESTATÍSTICA I - 5ª Lista de Exercícios

1. A proporção de pessoas que respondem a certa solicitação de vendas por catálogo é a variável aleatória contínua X, que tem como função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x+2)}{5}, \text{ se } 0 < x < 1, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

- **(a)** Mostre que $P(0 < X < 1) = 1$.
- **(b)** Determine a probabilidade de que mais de 1/4 e menos do que 1/2 das pessoas contactadas responderão a esse tipo de solicitação.

2. O prazo de validade, em dias, para frascos de certo medicamento prescrito é uma variável aleatória que tem como função de densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20000}{(x+100)^3}, \text{ se } x > 0, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a probabilidade de que um frasco do medicamento tenha prazo de validade

- **(a)** de pelo menos 200 dias.
- **(b)** entre 80 e 120 dias.

3. O número total de horas, medido em 100 horas, que uma família utiliza o aspirador de pó em sua casa durante o período de um ano é uma variável aleatória contínua X, que tem função de densidade

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } 0 < x < 1, \\ 2 - x, \text{ se } 1 \leq x < 2, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a probabilidade de que, durante o período de um ano, a família use o aspirador

- **(a)** menos de 120 horas.
- **(b)** entre 50 e 100 horas.

4. Uma variável aleatória contínua X, que pode assumir valores entre $x = 1$ e $x = 3$, tem função densidade dada por $f(x) = 1/2$, se $x \in (1, 3)$ e 0, caso contrário.

- **(a)** Mostre que a área abaixo da curva é igual a 1.
- **(b)** Determine $P(2 < X < 2,5)$.
- **(c)** Determine $F(x)$.
- **(d)** Determine $P(X \leq 1,6)$.

5. O tempo de espera, em horas, entre sucessivos motoristas flagrados por um radar que ultrapassam o limite de velocidade, é uma variável aleatória contínua com função distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-8x}, \text{ se } x \geq 0. \end{cases}$$

Determine a probabilidade de o tempo de espera entre sucessivos motoristas ser menor que 12 minutos,

- **(a)** usando a função distribuição acumulada de X.
- **(b)** usando a função densidade de probabilidade de X.

6. Em uma tarefa em um laboratório, se o equipamento estiver funcionando, a função densidade do resultado observado, X, é

$$f(x) = \begin{cases} a(1 - x), \text{ se } 0 < x < 1, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

- **(a)** Determine o valor de a.
- **(b)** Calcule $P(X \leq 1/3)$.
- **(c)** Qual é a probabilidade de que X exceda 0,5?
- **(d)** Dado que $X \geq 0,5$, qual é a probabilidade de que X seja menor do que 0,75?

7. Um importante fator no combustível sólido de um míssil é a distribuição do tamanho de partículas. Problemas importantes podem ocorrer se o tamanho das partículas for muito grande. Dos dados de produção obtidos no passado, foi determinado que a distribuição do tamanho da partícula, em micrômetros, é caracterizada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, \text{ se } x > 1, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

- **(a)** Verifique se essa é uma função densidade válida.
- **(b)** Obtenha $F(x)$.
- **(c)** Qual é a probabilidade de que o tamanho de uma partícula de um combustível manufaturado exceda 4 micrômetros?

8. Com base em testes, foi determinado por um fabricante de máquinas de lavar roupas que o tempo Y, em anos, antes que sejam necessários grandes reparos na máquina, é caracterizado pela função de densidade de probabilidade

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-y/4}, \text{ se } y \geq 0, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

- **(a)** Os críticos certamente considerariam o produto uma barganha se for improvável que ele necessite de grandes reparos antes do 6º ano de uso. Comente determinando $P(Y > 6)$.
- **(b)** Qual é a probabilidade de que seja necessário um grande reparo no primeiro ano?

9. Se X é uniformente distribuída no intervalo $(0, 20)$, calcule

- **(a)** $P(X < 3)$;
- **(b)** $P(X > 12)$;
- **(c)** $P(4 < X < 12)$;
- **(d)** $P(|X - 3| < 4)$.

10. Se X é uma variável aleatória uniformente distribuída no intervalo $(-3, 7)$, determine

- **(a)** $F(x)$.
- **(b)** $P(|X - 1| \leq 2)$.
- **(c)** $P(|X| > 3)$.

11. Se $X \sim U(-\alpha, \alpha)$, determine o valor do parâmetro α de modo que $P(-1 < X < 2) = 3/4$.

12. Certo tipo de condensador tem tempo de vida distribuído exponencialmente com média 250 horas. Determine a probabilidade de que um condensador dure menos de 320 horas.

13. Os tempos até a falha de um dispositivo eletrônico seguem o modelo exponencial com uma taxa de 0,012 falha/hora. Calcule a probabilidade de um dispositivo sobreviver

- **(a)** a 100 horas.
- **(b)** a 50 horas.

14. Um componente eletrônico tem duração com distribuição exponencial com média de 50 horas. De uma produção de 10000 unidades, quantos deles espera-se que durem entre 45 e 55 horas?

15. Suponha que a expectativa de vida, em anos, tem distribuição $Exp(1/60)$.

- **(a)** Determine, para um indivíduo escolhido ao acaso, a probabilidade de viver pelo menos até os 70 anos.
- **(b)** Idem para o indivíduo morrer antes dos 70, sabendo-se que o indivíduo acabou de completar 50 anos.

16. Z é uma variável aleatória com distribuição normal padrão. Determine

- **(a)** $P(Z = 0)$.
- **(b)** $P(Z < 1,96)$.
- **(c)** $P(Z < -2,89)$.
- **(d)** $P(Z > -1,33)$.
- **(e)** $P(Z \geq 2)$.
- **(f)** $P(0,18 < Z < 2,11)$.
- **(g)** $P(1,31 \leq Z \leq 2,41)$.
- **(h)** $P(Z > 4,36)$.

17. Z é uma variável aleatória com distribuição normal padrão. Determine o valor de z tal que

- **(a)** $P(Z < z) = 0,09$.
- **(b)** $P(-1,71 < Z < z) = 0,25$.

18. Z é uma variável aleatória com distribuição normal padrão. Calcule

(a) $P(Z > 6)$;
(b) O valor de z, tal que $P(-z < Z < z) = 0,90$.
(c) O valor de z, tal que $P(-z < Z < z) = 0,99$.

19. Seja $X \sim N(10, 4)$. Calcule
(a) $P(8 < X < 10)$.
(b) $P(X > 10)$.
(c) $P(9 \leq X \leq 12)$.
(d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$.

20. Para $X \sim N(100, 100)$, calcule
(a) $P(X < 115)$.
(b) $P(X \geq 80)$.
(c) $P(|X - 100| \leq 10)$.

21. As alturas de 10000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média 170 cm e desvio padrão 5 cm. Qual é o número esperado de alunos com altura superior a 165 cm?

22. As vendas de determinado produto têm distribuição aproximadamente normal com média 500 unidades e desvio padrão 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades em um certo mês estudo, qual a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês por estar com a produção esgotada?

23. Se a altura de 300 estudantes é normalmente distribuída com média igual a 172,72 cm e variância 49,5 cm^2, determine quantos estudantes têm altura superior a 182,88 cm.

24. A quantidade diária de café, em litros, servida por uma máquina localizada no saguão de um aeroporto é uma variável aleatória X, que tem uma distribuição uniforme contínua no intervalo $(7, 10)$. Encontre a probabilidade de que, em um certo dia, a quantidade de café servida pela máquina seja
(a) no máximo 8,8 litros.
(b) mais de 7,4 litros, mas menos de 9,5 litros.
(c) pelo menos 8,5 litros.

25. Um ônibus chega a cada dez minutos em um ponto de parada. Assume-se que o tempo de espera para um indivíduo é uma variável aleatória com distribuição uniforme.
(a) Qual é a probabilidade de que o indivíduo espere mais de sete minutos?
(b) Qual é a probabilidade de que o indivíduo espere entre dois e sete minutos?
(c) Dado que o indivíduo está espererando o ônibus há cinco minutos, qual é a probabilidade de que o indivíduo espere não mais que dois minutos.

26. O tempo de resposta de computadores é uma importante aplicação da distribuição exponencial. Suponha que um estudo sobre certo sistema de computador revele que o tempo de resposta, em segundos, tem uma distribuição exponencial com média de três segundos.
(a) Qual é a probabilidade de que o tempo de resposta exceda cinco segundos?
(b) Qual é a probabilidade de que o tempo de resposta não exceda dez segundos?

27. Suponha que a duração de um dispositivo eletrônico seja exponencialmente distribuída. Sabe-se que a probabilidade desse dispositivo ter duração de vida superior a um período de 100 horas de operação é de 0,90. Pelo menos quantas horas de operação devem ser levadas em conta para conseguir uma probabilidade de 0,95?

28. Uma envasadora automática de garrafas de refrigerante está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1.000 cm^3 e o desvio padrão de 10 cm^3. Pode-se admitir que a distribuição da variável é normal.
(a) Qual a probabilidade de garrafas em que o volume de líquido é menor que 990 cm^3?
(b) Qual a probabilidade de garrafas em que o volume de líquido não se desvie da média em mais que dois desvios padrão?

29. Suponha que o diâmetro médio dos parafusos produzidos por uma fabrica é de 0,25 polegadas e o desvio padrão 0,02 polegadas. Um parafuso é considerado defeituoso se seu diâmetro for maior do que 0,28 polegada ou menor do que 0,20 polegada. Suponha distribuição normal.
(a) Encontre a probabilidade de parafusos defeituosos.
(b) Qual deve ser a medida mínima para que tenhamos no máximo 12% de parafusos defeituosos.

30. Estudos meteorológicos indicam que a precipitação pluviométrica mensal em períodos de seca em uma certa região pode ser considerada como seguindo a distribuição normal de média 30mm e variância 16mm^2.
(a) Qual a probabilidade de que a precipitação pluviométrica mensal no período da seca esteja entre 24mm e 38mm?
(b) Qual seria o valor da precipitação pluviométrica de modo que com probabilidade 0,1 ocorra uma precipitação inferior a esse valor?

Respostas. 1-b)19/80; 2-a) 1/9; b) 0,1020; 3-a) 0,68; b) 0,375; 4-b) 0,25; d) 0,3; 5-a) 0,798; b) 0,798; 6-a) 2; b) 5/9; c) 0,25; d) 0,75; 7-c) 0,0156; 8-a) 0,2231; b) 0,2212; 9-a) 0,15; b) 0,4; c) 0,4; d) 0,35; 10-b) 0,4; c) 0,4; 11- 2; 12- 0,722; 13-a) 0,301; b) 0,549; 14- 737; 15-a) 0,311; b) 0,283; 16-a) 0; b) 0,9750; c) 0,0019; d) 0,9082; e) 0,0228; f) 0,4112; g) 0,0871; h) 0; 17-a) -1,34; b) -0,54; 18-a) 0; b) $\mp 1,65$; c) $\mp 2,58$; 19-a) 0,3413; b) 0,5; c) 0,5328; d) 0,4672; 20-a) 0,9332; b) 0,9772; c) 0,6826; 21- 8413; 22- 0,0228; 23- 23; 24-a) 0,6; b) 0,7; c) 0,5; 25-a) 0,3; b) 0,5; c) 0,4; 26-a) 0,1889; b) 0,9643; 27- 48,68; 28-a) 0,1587; b) 0,9545; 29-a) 0,0730; b) 0,2266; 30-a) 0,9104; b) 24,88.