EST507 Modelos de Regressão
2017

Algumas Distribuições Úteis
(Adaptação da segunda versão)

Versão original: Cibele Russo (ICMC/USP)
Segunda versão: Gustavo Pereira (UFSCar)

Distribuição qui-quadrado

Sejam $Z_1, \ldots, Z_n$ variáveis aleatórias independentes, em que $Z_i \sim N(0,1)$. Então,

$$U = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

tem distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade. A função densidade de probabilidade de U é dada por

$$f(u) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{n/2}} u^{(n-2)/2} e^{-u/2}, \quad 0 < u < \infty,$$

em que $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$, $a > 0$ e $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Para n inteiro positivo, $\Gamma(n+1) = n!$

Distribuição qui-quadrado

Notação: $U \sim \chi^2_n$.

Função geradora de momentos:

$m_u(t) = \mathrm{E}(e^{tu}) = (1-2t)^{-n/2}$, $0 < t < 1/2$.

Momentos:

$\mathrm{E}(U) = n$, $\mathrm{Var}(U) = 2n$,

$\mathrm{E}(U^2) = n(n+2)$, $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{U}\right) = \dfrac{1}{n-2}, n > 2$,

$\mathrm{E}(U^{1/2}) = 2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})$, $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{U^2}\right) = \dfrac{1}{(n-2)(n-4)}, n > 4$,

$$\mathrm{E}(U^{-1/2}) = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Distribuição qui-quadrado não central

Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes, em que $Y_i \sim N(\mu_i, 1)$. Então,

$$U = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

tem distribuição qui-quadrado não central com n graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2/2$. A função densidade de probabilidade de U é dada por

$$f(u) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{u^{(n+2k-2)/2} e^{-u/2}}{\Gamma(\frac{n+2k}{2}) 2^{(n+2k)/2}}, \quad 0 < u < \infty$$

Distribuição qui-quadrado não central

Notação: $U \sim \chi^2_{n,\lambda}$.
Obs.: Define-se $\lambda^k = 1$ para $\lambda = 0, k = 0$. Para $\lambda = 0$, esta densidade se reduz à da variável aleatória com distribuição χ^2_n.
Função geradora de momentos:
$m_u(t) = \mathrm{E}(e^{tu}) = (1-2t)^{-n/2} e^{-\lambda[1-(1-2t)^{-1}]}$, $0 < t < 1/2$.

Distribuição qui-quadrado não central

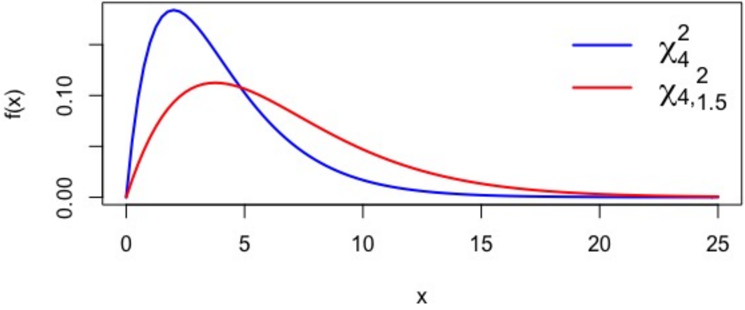
Momentos:
$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(U) = n + 2\lambda \ \text{e} \\ &\mathrm{Var}(U) = 2(n + 4\lambda). \end{aligned}$$

Distribuição qui-quadrado não central

Momentos: $E(U) = n + 2\lambda$ e
$\text{Var}(U) = 2(n + 4\lambda)$.

Resultado: Se U_1 e U_2 são variáveis aleatórias independentes, com $U_1 \sim \chi^2_{n_1,\lambda_1}$ e $U_2 \sim \chi^2_{n_2,\lambda_2}$, então $U_1 + U_2 \sim \chi^2_{n_1+n_2,\lambda_1+\lambda_2}$.

Distribuições qui-quadrado central e não central



Distribuição t de Student

Se $Z \sim N(0,1)$ e $U \sim \chi^2_n$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$$

tem distribuição t de Student com n graus de liberdade. A função densidade de probabilidade de T é dada por

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notação: $T \sim t_n$.

Distribuição t de Student

Função geradora de momentos: não existe.

Momentos:

$$\mathrm{E}(T) = 0, \text{ para } n > 1,$$

$$\mathrm{Var}(T) = \frac{n}{n-2}, \text{ para } n > 2.$$

Distribuição t de Student não central

Se $X \sim N(\mu, 1)$ e $U \sim \chi^2_n$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$T^* = \frac{X}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$$

tem distribuição t de Student não central, com n graus de liberdade e parâmetro de não centralidade μ. A função densidade de probabilidade de T^* é dada por

$$f(t) = \frac{n^{n/2} e^{-\mu^2/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})(n+t^2)^{(n+1)/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n+k+1}{2})\mu^k 2^{k/2} t^k}{k!(n+t^2)^{k/2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notação: $T^* \sim t_{n,\mu}$.

Distribuição F de Fisher-Snedecor

Sejam U_1 e U_2 variáveis aleatórias independentes tais que $U_1 \sim \chi^2_{n_1}$ e $U_2 \sim \chi^2_{n_2}$. Então

$$W = \frac{\dfrac{U_1}{n_1}}{\dfrac{U_2}{n_2}} \text{ tem distribuição F de Snedecor,}$$

com n_1 graus de liberdade no numerador e n_2 graus de liberdade no denominador. A função densidade de probabilidade de W é dada por

$$f(w) = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} \frac{n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2} w^{(n_1-2)/2}}{(n_2 + wn_1)^{(n_1+n_2)/2}}, \quad w > 0.$$

Distribuição F de Fisher-Snedecor

Função geradora de momentos: não existe.

Momentos:

$$E(W) = \frac{n_2}{n_2 - 2}, \text{ para } n_2 > 2,$$

$$\mathrm{Var}(W) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}, \text{ para } n_2 > 4,$$

$$E(W^2) = \frac{n_2^2(n_1 + 2)}{n_1(n_2 - 2)(n_2 - 4)}, \text{ para } n_2 > 4.$$

Distribuição F não central

Sejam U_1 e U_2 variáveis aleatórias independentes tais que $U_1 \sim \chi^2_{n_1,\lambda}$ e $U_2 \sim \chi^2_{n_2}$. Então,

$$W = \frac{U_1/n_1}{U_2/n_2} \text{ tem distribuição F não central,}$$

com n_1 graus de liberdade no numerador, n_2 graus de liberdade no denominador e parâmetro de não centralidade λ. A função densidade de probabilidade de W é dada por

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2+2k}{2})}{\Gamma(\frac{n_1+2k}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} \frac{n_1^{(n_1+2k)/2} n_2^{n_2/2} w^{(n_1+2k-2)/2}}{(n_2+wn_1)^{(n_1+n_2+2k)/2}}, \quad w > 0.$$

Notação: $W \sim F_{n_1,n_2,\lambda}$.

Distribuição F não central

Obs.: Para $\lambda = 0$ (e com $0^0 = 1$), esta função densidade se reduz à da variável aleatória com distribuição F_{n_1, n_2}.

Momentos:

$$\mathrm{E}(W) = \frac{n_2}{n_2 - 2}\left(1 + \frac{2\lambda}{n_1}\right), \text{ para } n_2 > 2,$$

$$\mathrm{Var}(W) = \frac{2n_2^2}{n_1^2(n_2 - 2)}\left[\frac{(n_1 + 2\lambda)^2}{(n_2 - 2)(n_2 - 4)} + \frac{n_1 + 4\lambda}{n_2 - 4}\right],$$

para $n_2 > 4$.

Distribuições F central e não central