

Algoritmos e Estruturas de Dados II

Grafos – conceitos gerais

Thiago A. S. Pardo

Profa. M. Cristina

Material de aula da Profa.

Josiane M. Bueno

Grafos

Grafos Valorados

- Um grafo valorado (ponderado/com pesos) $G(V,A)$ consiste de um conjunto finito não vazio de vértices V , ligados por um conjunto de arestas ou arcos com pesos A .
- O conjunto A consiste de triplas distintas da forma $(v,w,valor)$, em que v e w são vértices pertencentes a V e valor é um número real.

Grafos

Grafos Valorados

Quão minha amiga é uma certa pessoa ?

Grafos podem ter **arestas** com pesos representando a 'força' da relação entre os vértices:

Ex.

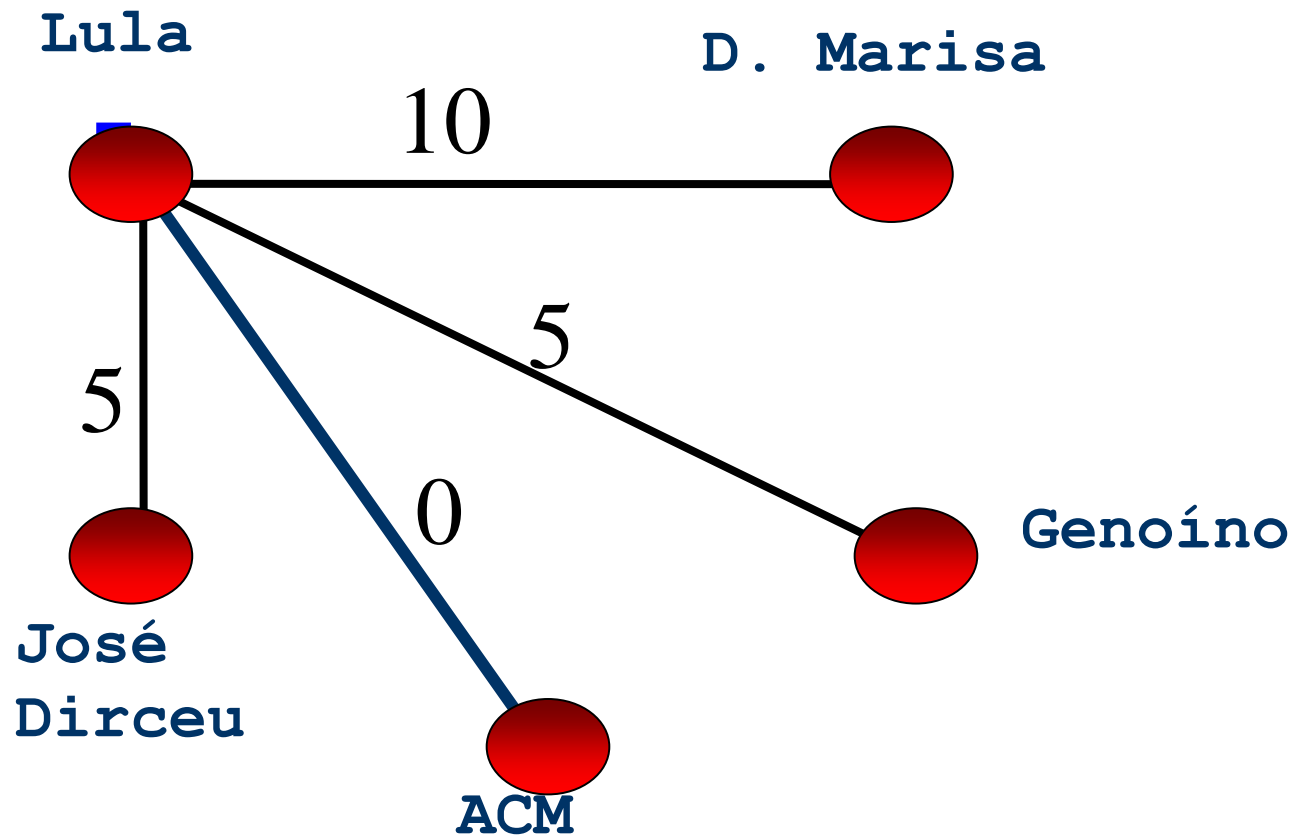
0: inimiga

5: colega

10: amiga

Grafos

Grafos Valorados – Exemplo



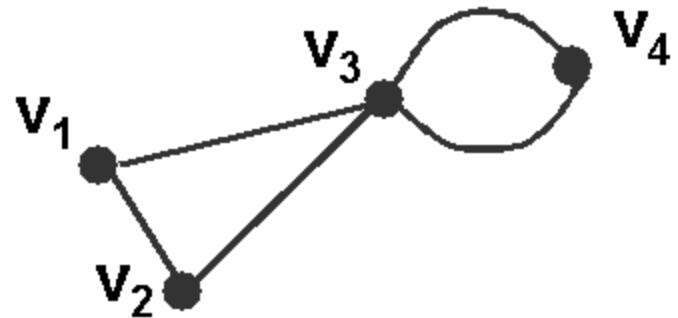
Grafos

Caminho

- Um **caminho** entre dois vértices, x e y , é uma seqüência de vértices e arestas que une x e y .
- Um caminho de **k -vértices** é formado por **$k-1$ arestas** $(v_1, v_2), (v_2, v_3) \dots (v_{k-1}, v_k)$, e o valor de $k-1$ é o **comprimento** do caminho.

$$P = v_3, v_1, v_2 = P^2$$

$$P = v_3, v_4, v_3, v_1 = P^3$$



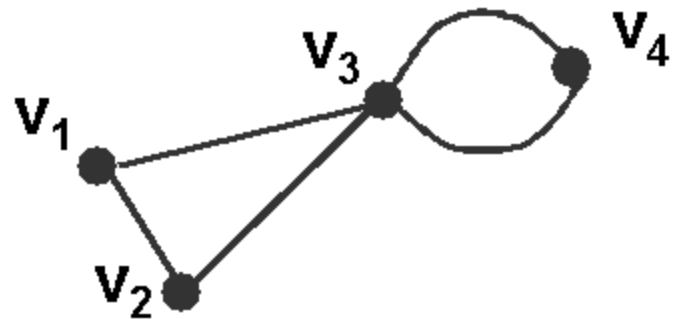
Grafos

Caminho Simples

- Um caminho é **simple** se todos os vértices que o compõem forem distintos.

O caminho $P = v_3, v_1, v_2$ é **simple**

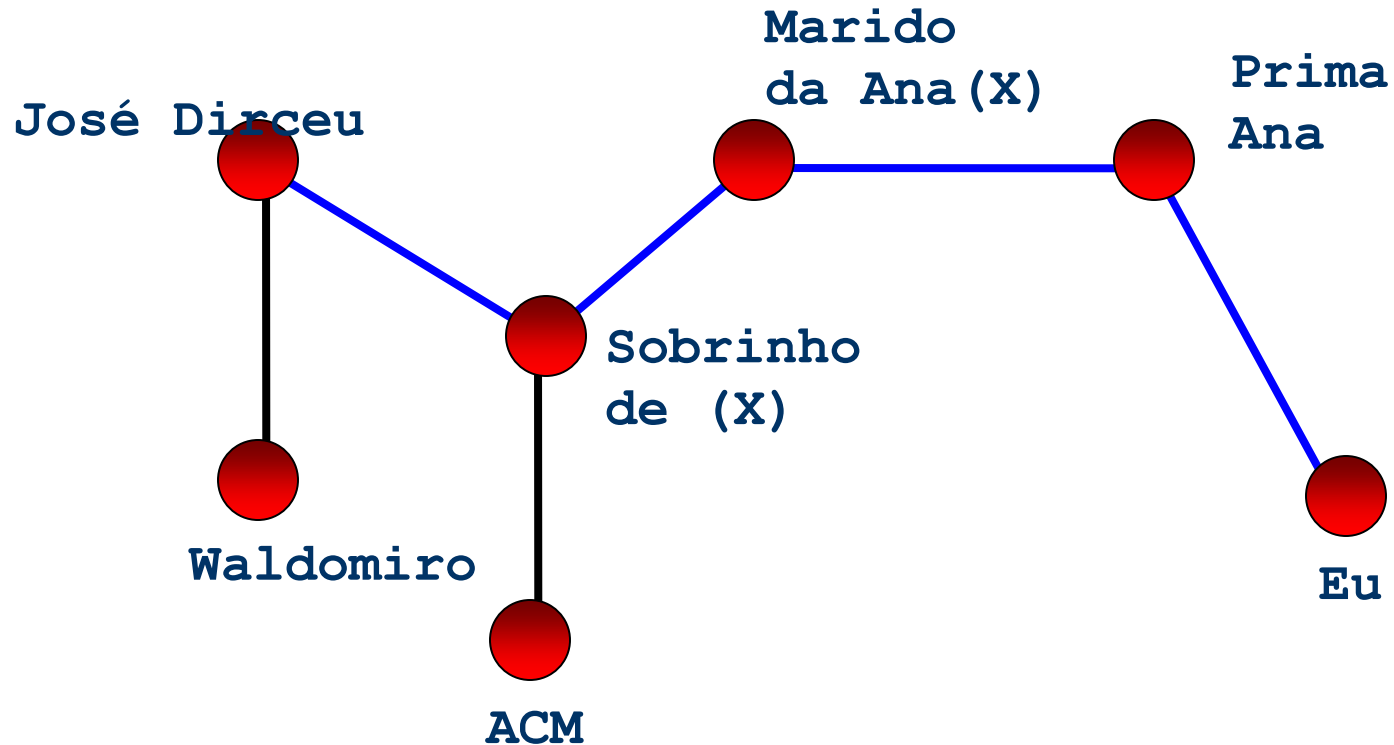
O caminho $P = v_3, v_4, v_3, v_1$
NÃO é simple



Grafos

Caminho

O Grafo da Amizade...



Grafos

Menor caminho

O Grafo da Amizade

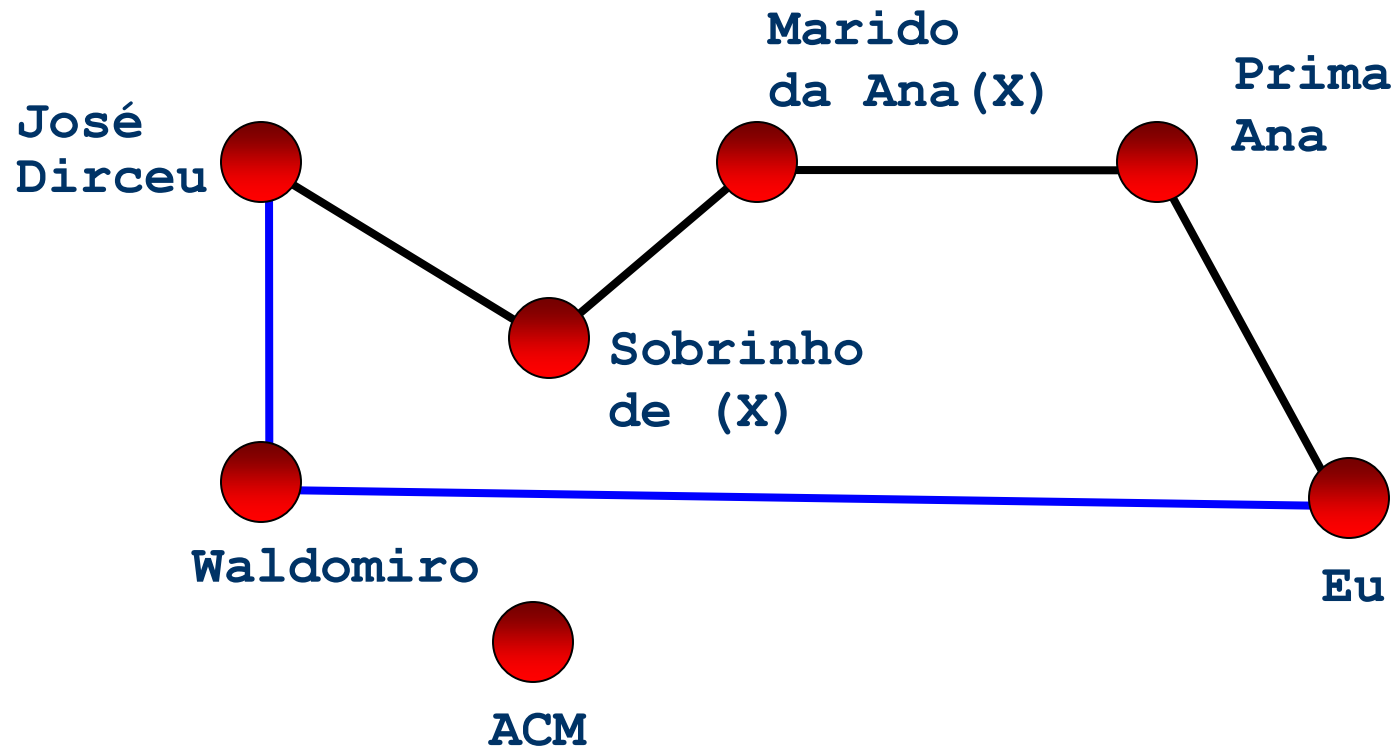
Qual o **menor caminho** para me ligar a um político?

A multiplicidade de possíveis caminhos num grafo pode gerar a necessidade de buscar o menor caminho a um determinado vértice

Grafos

Exemplo de menor caminho

O Grafo da Amizade



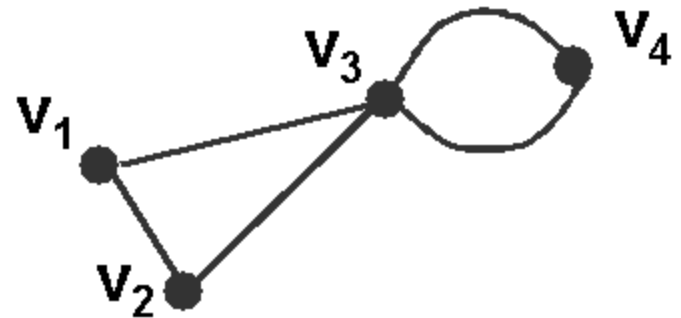
Grafos

Circuito e Ciclo

- Um **circuito** é um caminho $P = v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$, onde $v_1 = v_{k+1}$. Um **ciclo** é um circuito onde todos os vértices são distintos (exceto pelo primeiro e pelo último).
- Um grafo é **cíclico** se apresentar ao menos um ciclo.

v_3, v_1, v_2, v_3 é um ciclo

Portanto, este grafo é cíclico



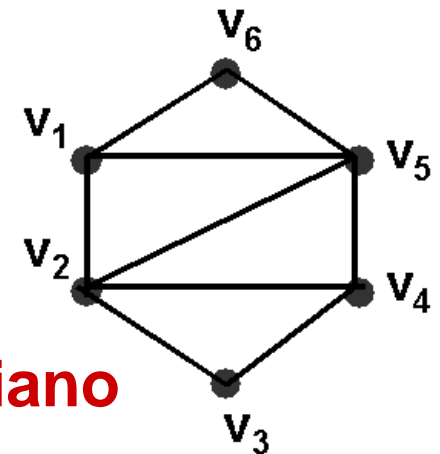
Grafos

Caminho Hamiltoniano

- **Caminho Hamiltoniano** é aquele que contém cada vértice do grafo exatamente uma vez.
- Um ciclo $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$ é hamiltoniano quando o caminho v_1, v_2, \dots, v_k for um caminho hamiltoniano.
- Um grafo é **hamiltoniano** se corresponde a um ciclo **hamiltoniano**

$v_1, v_6, v_5, v_2, v_3, v_4$ é hamiltoniano

$v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_6$ é um ciclo hamiltoniano



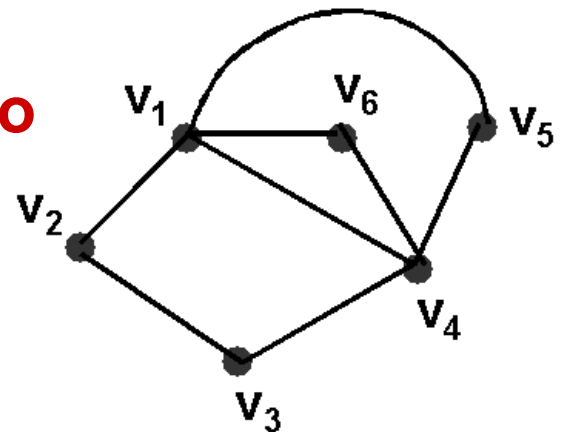
Grafos

Caminho Euleriano

- **Caminho Euleriano** é aquele que contém cada aresta do grafo exatamente uma vez.
- Um grafo é **Euleriano** se há um circuito em G que contenha todas as suas arestas.

$V_1, V_6, V_4, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_1$ é euleriano

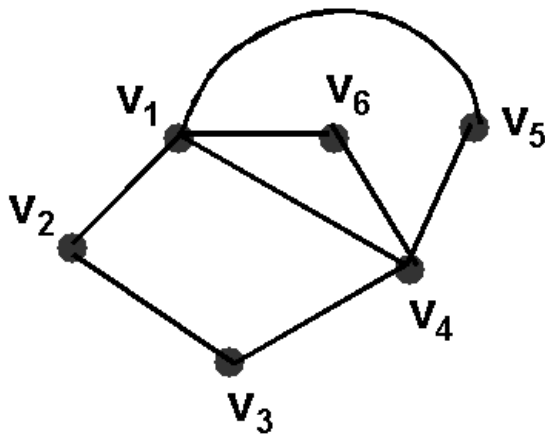
Portanto, este grafo é **euleriano**



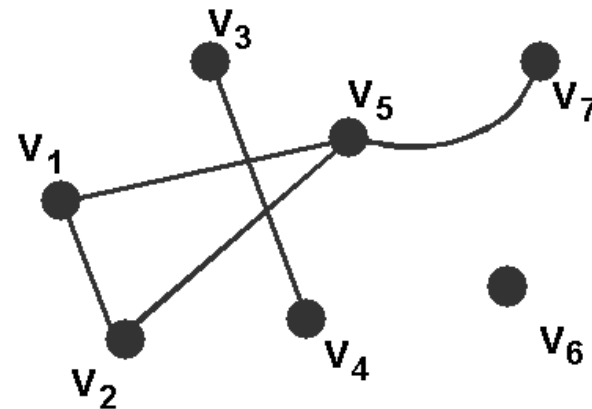
Grafos

Grafo Conexo

- Um grafo $G = (V, E)$ é **conexo** quando existe um caminho entre cada par de vértices de G , caso contrário, G é **desconexo**.



Conexo

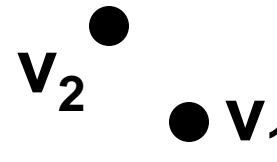


Desconexo

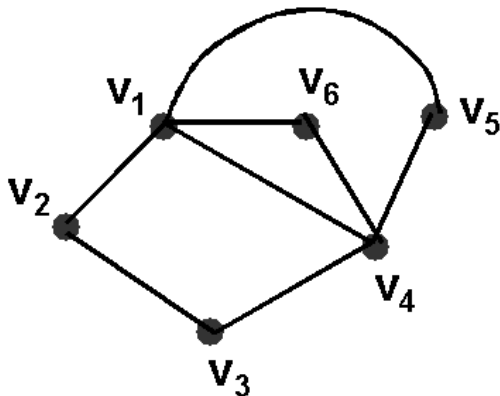
Grafos

Grafo Conexo

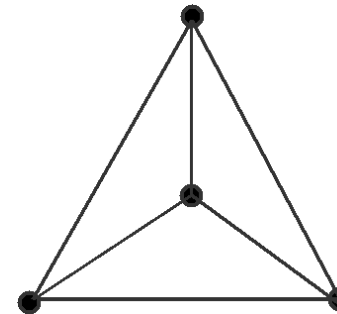
- Um grafo é **totalmente desconexo** quando não possui arestas.



- Todo grafo euleriano é **conexo** e todos os seus vértices possuem **grau par**.



É euleriano

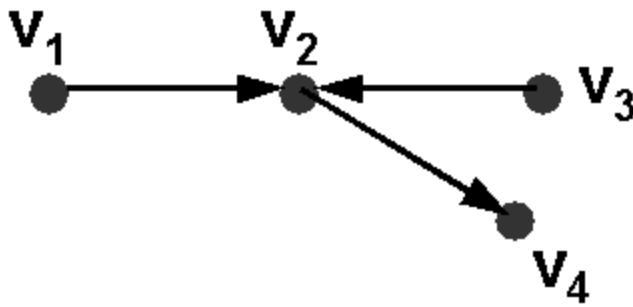


Não é
euleriano

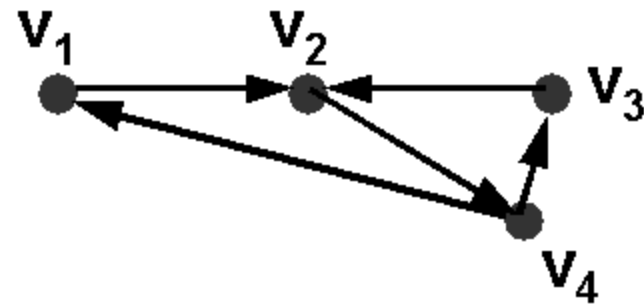
Grafos

Dígrafo Fortemente Conexo

- Um grafo orientado $D = (V,E)$ é dito ser **fortemente conexo** quando existe um caminho entre cada par de vértices (x,y) e também entre (y,x) .



Conexo

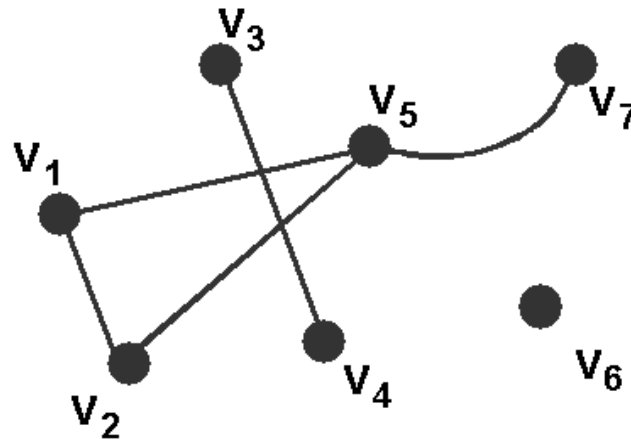


Fortemente Conexa

Grafos

Componente Conexa

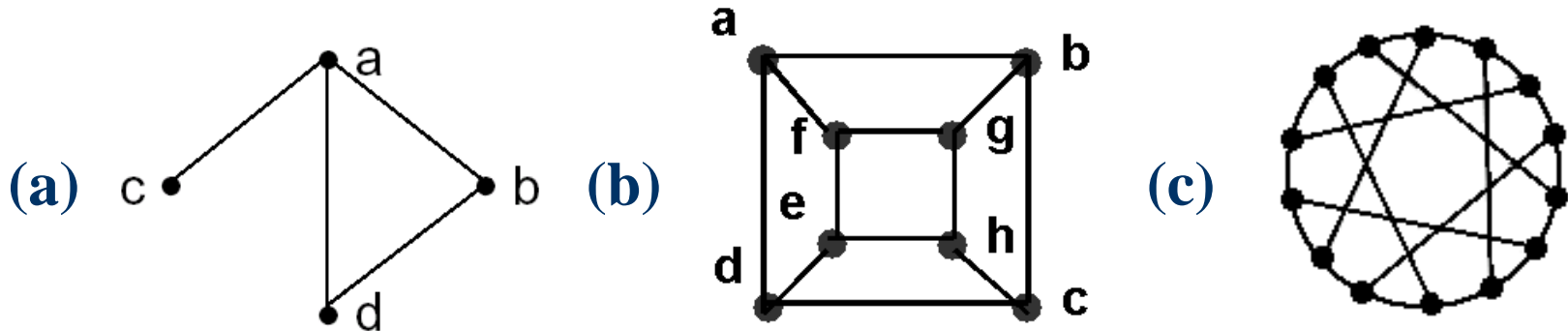
- Uma **componente conexa** corresponde a um **subgrafo conexo**



Contém 3 componentes conexas

Grafos

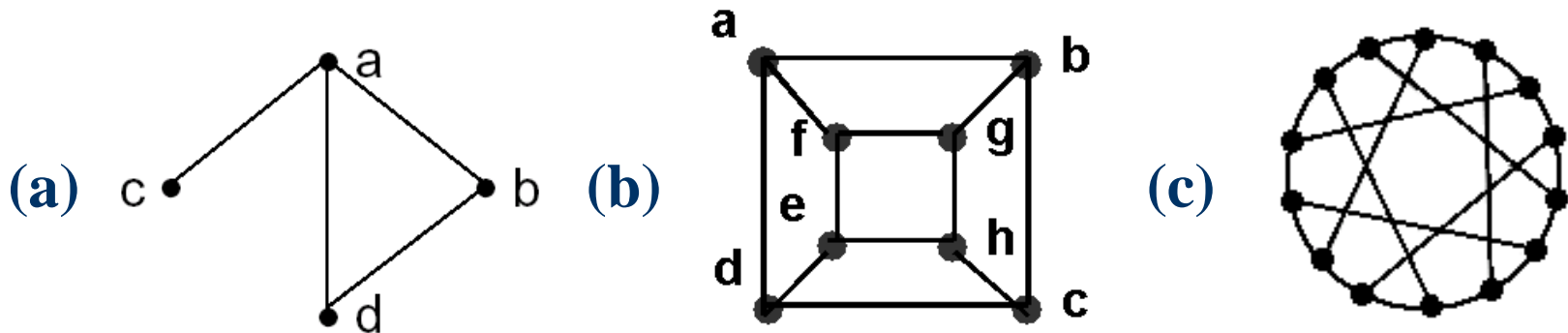
Exercícios de Fixação



- Qual dos grafos acima são cíclicos?
- Indique os grafos que são conexos.
- Qual(is) dos grafos acima são Eulerianos?
- Quais são Hamiltonianos?

Grafos

Exercícios de Fixação



- Qual dos grafos acima são cíclicos? **Todos**
- Indique os grafos que são conexos. **Todos**
- Qual(is) dos grafos acima são Eulerianos? **Não há**
- Quais são Hamiltonianos? **(b) e (c)**

Grafos

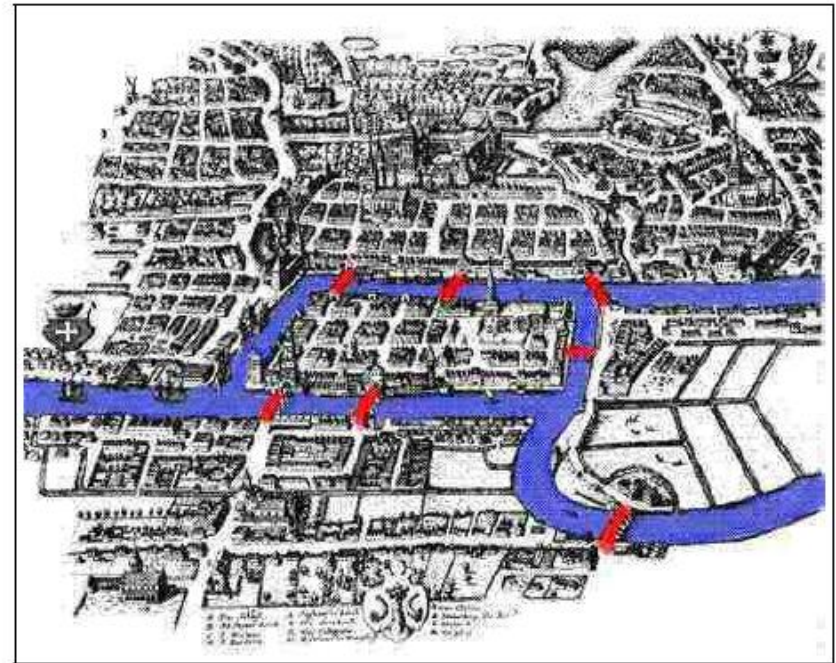
Exercício de Fixação

No século XVIII, na Prússia, havia uma controvérsia entre os moradores de Königsberg que chegou aos ouvidos do matemático Leonhard Euler.

Euler descreveu a controvérsia da seguinte forma:

“... Na cidade de Königsberg, na Prússia, há uma ilha chamada Kneiphof, com os dois braços do rio Pregel fluindo em volta dela. Há 7 pontes – a, b, c, d, e, f e g – cruzando estes dois braços.

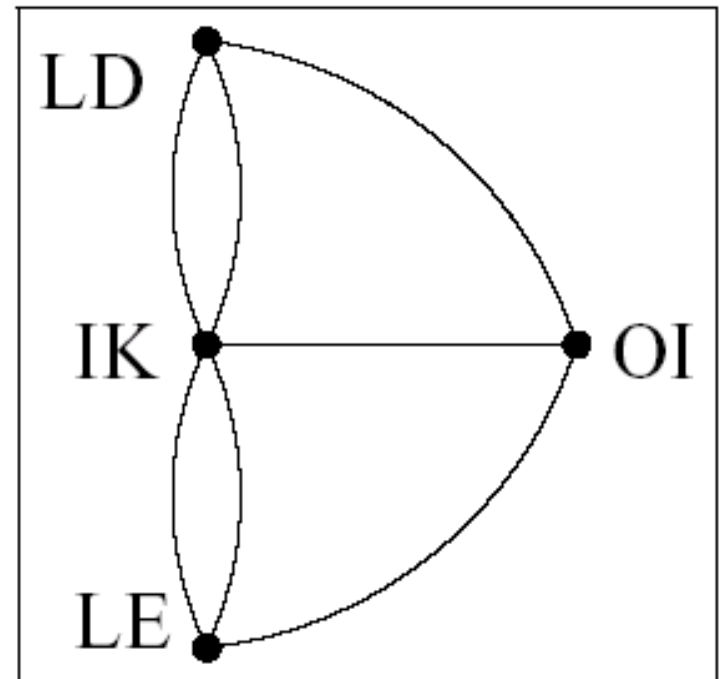
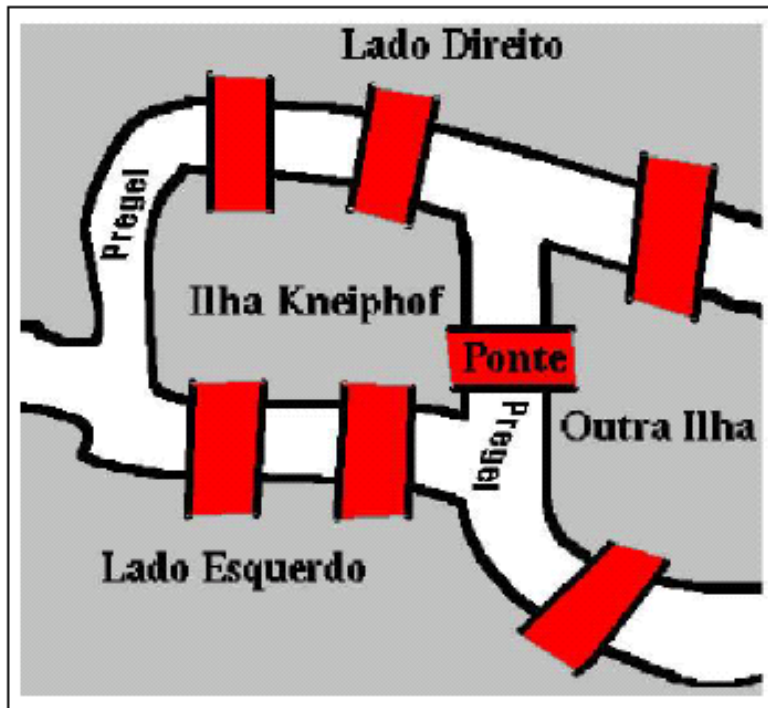
...A questão é se uma pessoa pode planejar uma caminhada de modo que ela cruze cada uma destas pontes uma única vez, e não mais que isso. . . ”



Como representar este problema?

Grafos

Exercício de Fixação



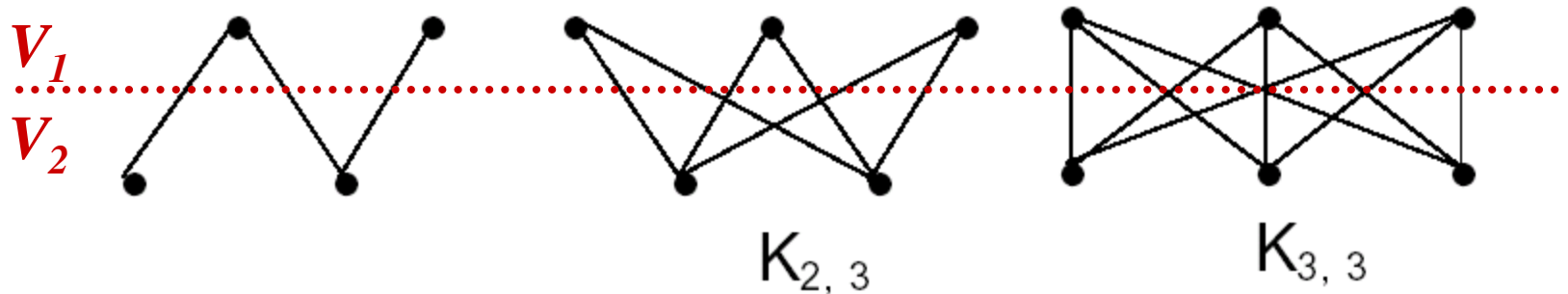
Por que não foi possível fazer tal trajeto?

Grafos

Grafo Bipartido

- Um grafo $G = (V, E)$ é **bipartido** quando o seu conjunto de vértices V puder ser dividido em dois subconjuntos V_1, V_2 tais que toda aresta do conjunto E une um vértice de V_1 a outro vértice de V_2 . Matematicamente:

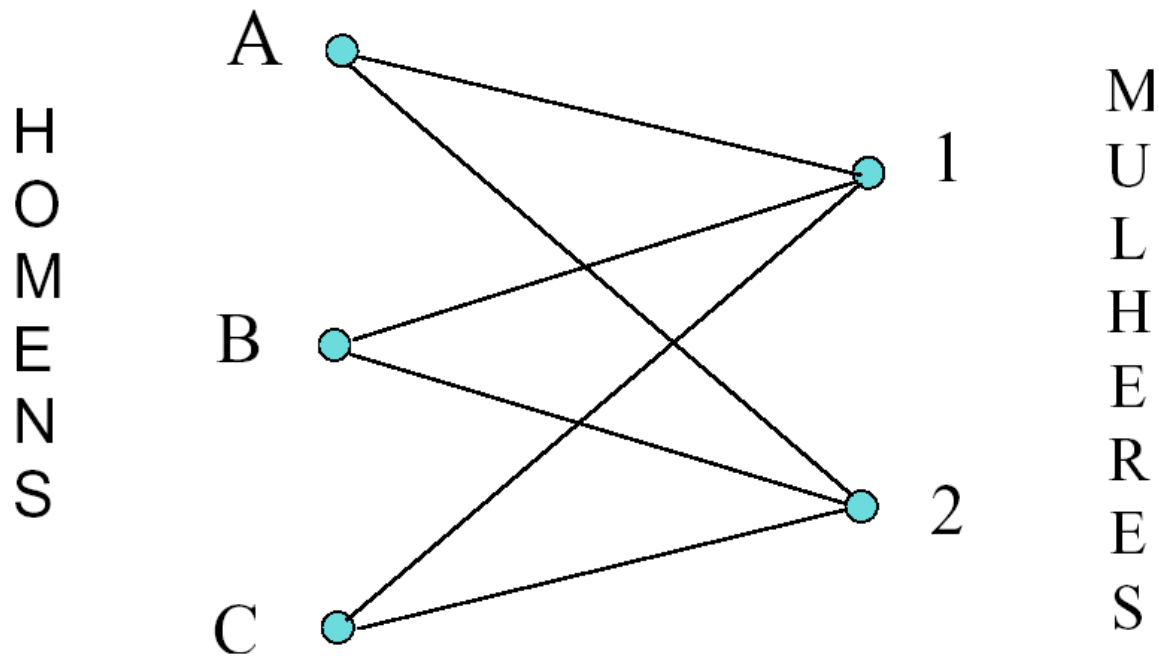
$$V = V_1 \cup V_2; V_1 \cap V_2 = \emptyset \text{ e } \forall e = (u, v) \in E \Rightarrow u \in V_1 \text{ e } v \in V_2$$



Grafos

Grafo Bipartido

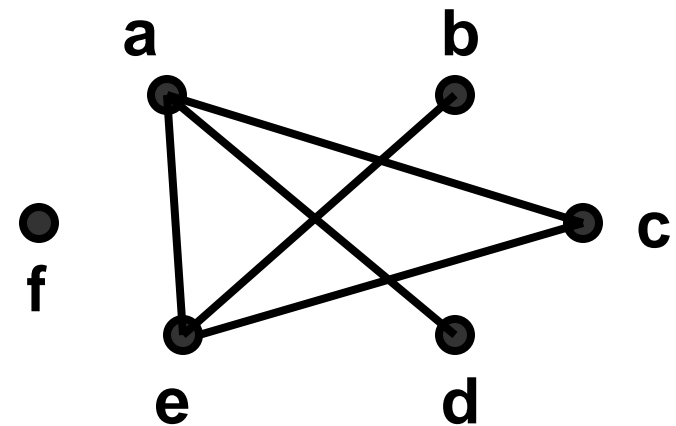
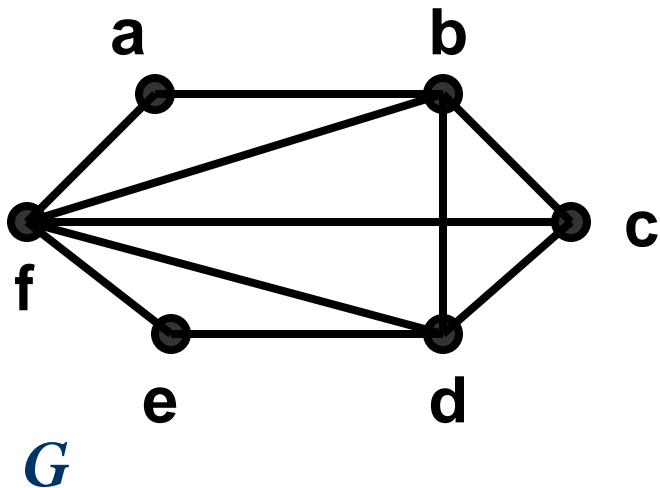
Namoro



Grafos

Complemento

- Denomina-se **complemento** de um grafo $G = (V, E)$ a um grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' = V$ e E' é complementar a E .

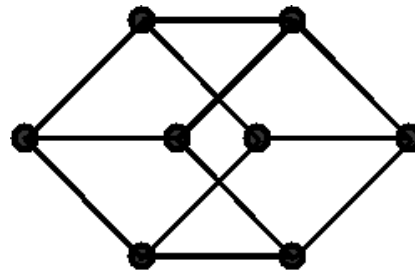
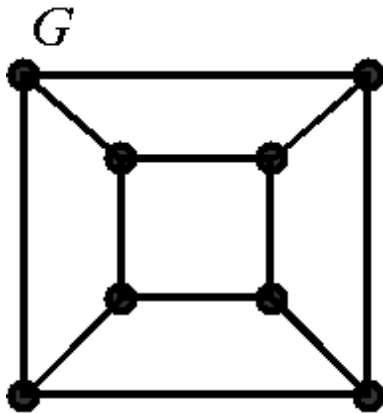


Complemento de G

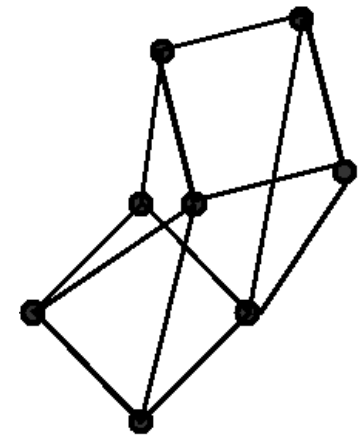
Grafos

Isomorfismo

- Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são **isomorfos entre si** se existe correspondência entre os seus vértices e arestas de forma a preservar a relação de incidência, ou seja, $|V| = |V'|$, $|E| = |E'|$ e existe uma função unívoca $f: V \rightarrow V'$, tal que $e=(x,y) \in E$ se e somente se $e'=(f(x),f(y)) \in E'$.



É isomorfo a G

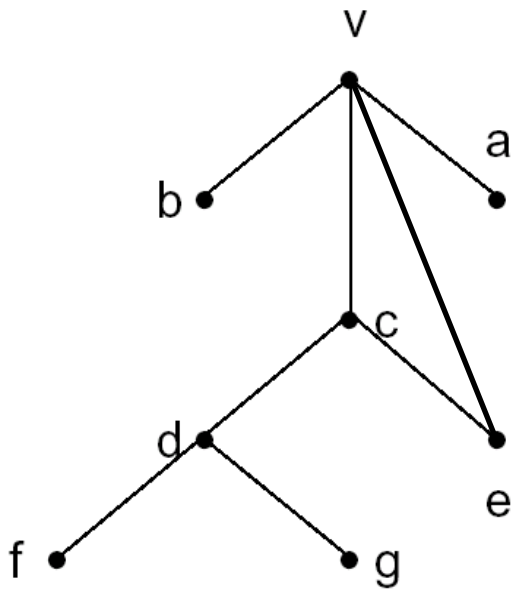


NÃO É
isomorfo a G

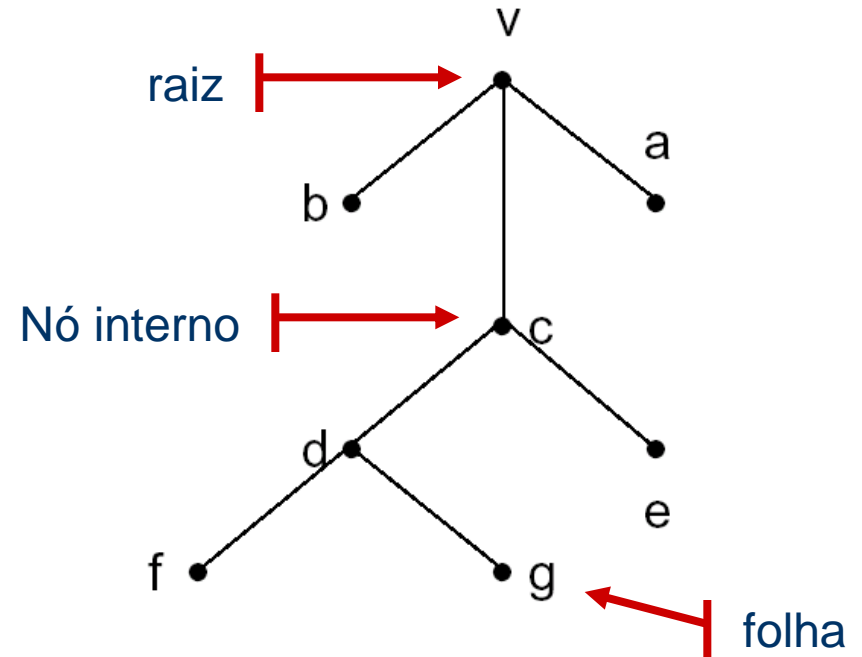
Grafos

Árvore

- Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico.



Não é uma árvore

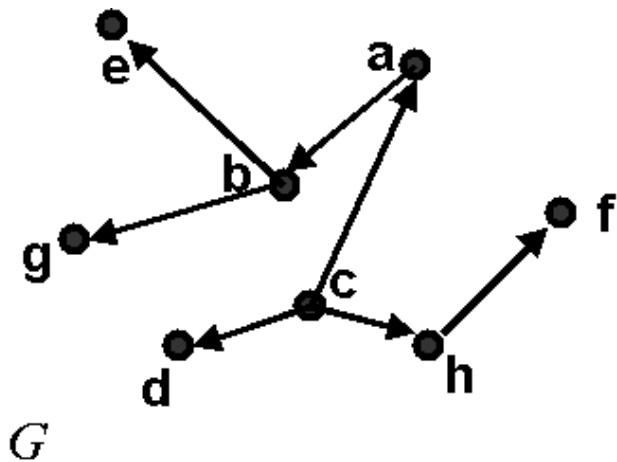


É uma árvore

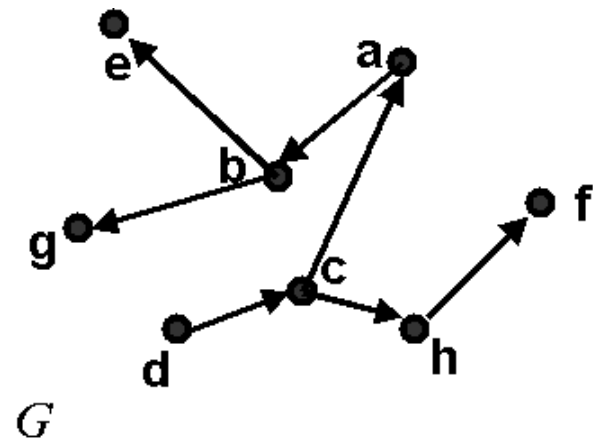
Grafos

Árvore Enraizada

- Uma **árvore enraizada** é uma árvore orientada em que há um vértice do qual todas as arestas se afastam (**raiz**).



É árvore enraizada
(raiz c)

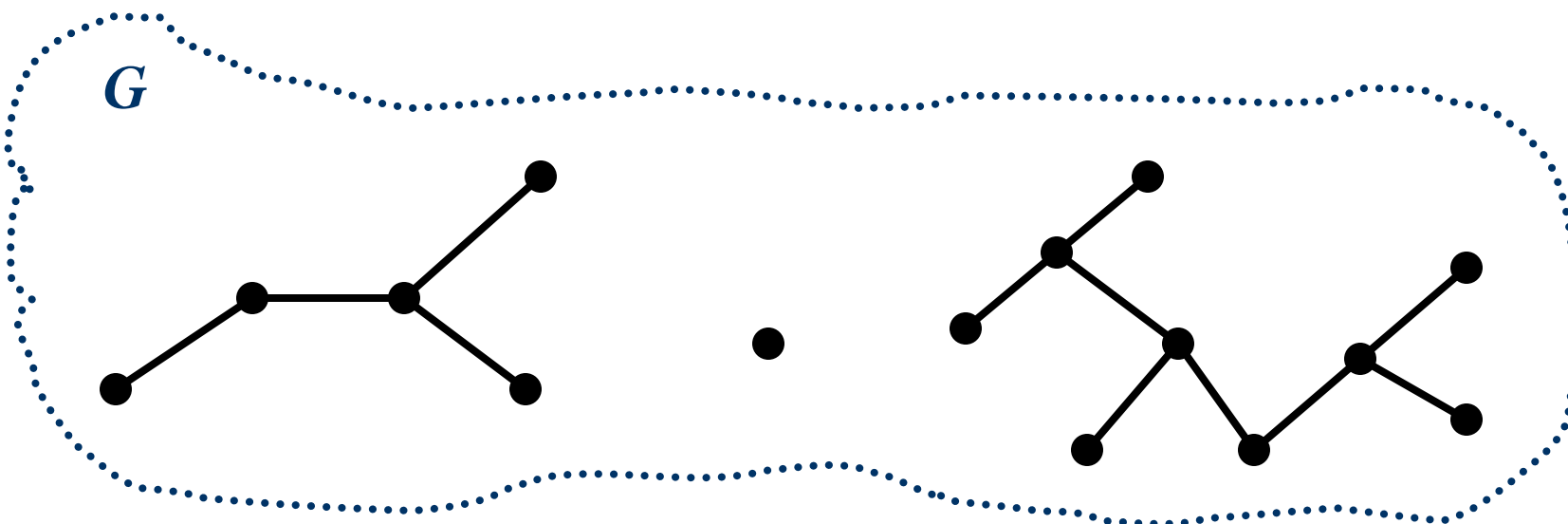


É árvore enraizada
(raiz d)

Grafos

Floresta

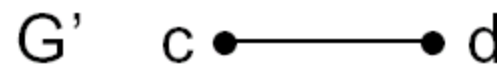
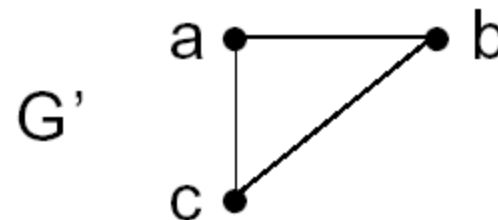
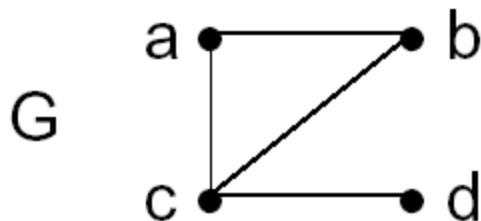
- Uma **Floresta** é um conjunto de árvores.



Grafos

Subgrafo

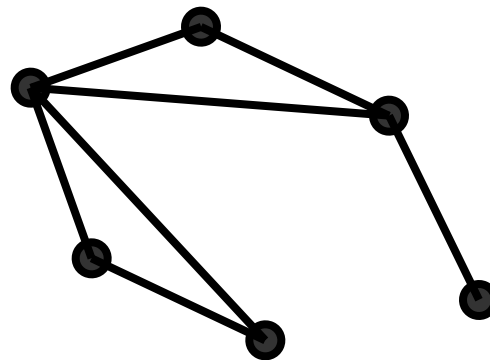
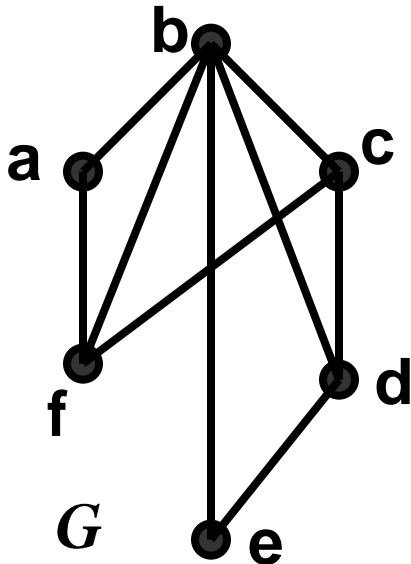
- Um **subgrafo** $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.



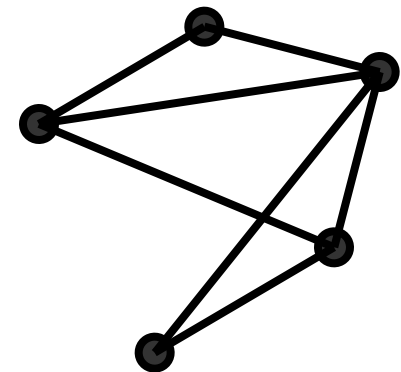
Grafos

Subgrafo Gerador

- Um **subgrafo gerador** $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' = V$ e $E' \subseteq E$.



É subgrafo gerador de G

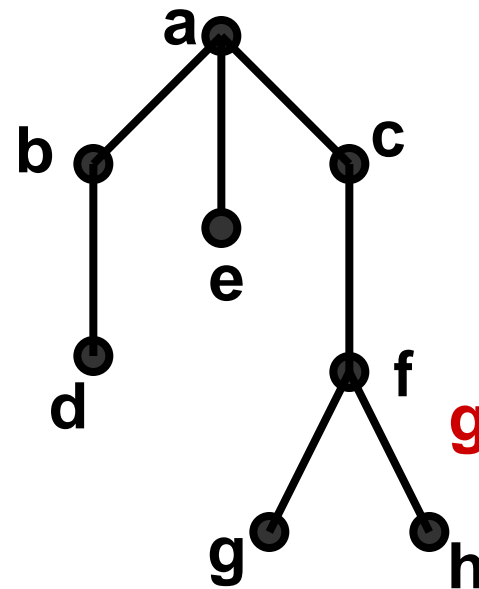
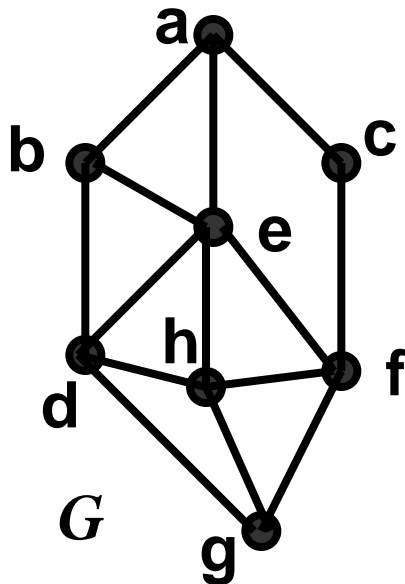


NÃO é subgrafo gerador de G

Grafos

Árvore Geradora

- Uma **árvore geradora** $G' = (V', E')$ de um grafo é um subgrafo gerador que é uma árvore.

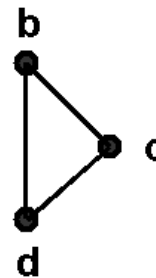
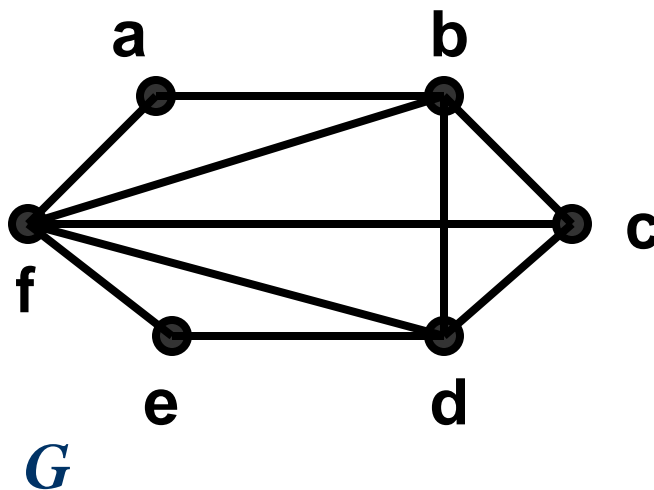


É árvore geradora de G

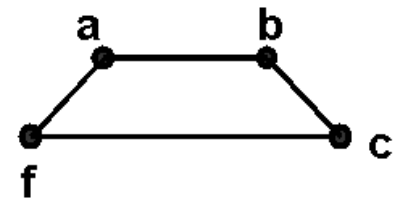
Grafos

Subgrafo Induzido

- Um **subgrafo induzido** $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e E' contém todas as arestas em E que tem as duas extremidades em V' .



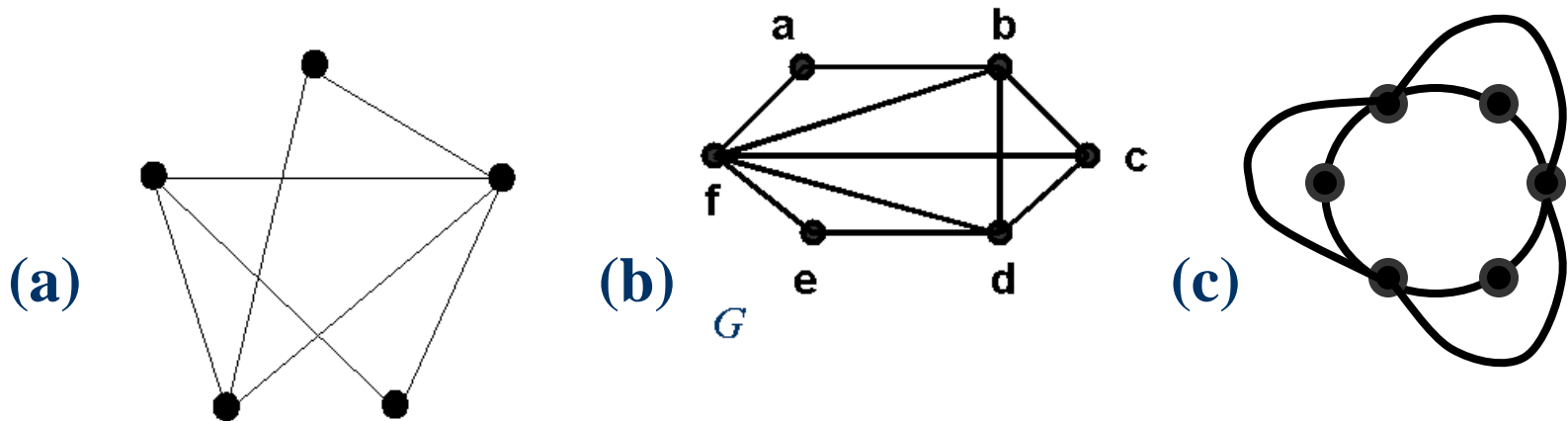
É subgrafo induzido de G



NÃO é subgrafo induzido de G

Grafos

Exercícios de Fixação



- Quais os complementos dos grafos (a) e (c)?
- Os grafos (b) e (c) são isomorfos?
- Represente graficamente um grafo $K_{4,3}$.

Tema para pesquisar

- **Exercício individual (à mão) para entregar na aula seguinte**
 - **Redes complexas**

Para pensar

- **Definição do TAD grafo**
 - **Dados/informação**
 - **Operações**