4. Medidas de posição

2010

Também chamadas de medidas de localização e medidas de tendência central (*location* e *central tendency*).

Cada medida é um valor representativo dos dados $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Redução (drástica) de n observações a um só valor.

4.1. Média aritmética (ou média) (*mean*)

$$\text{Notação: } \bar{x} \quad \text{(xis barra).}$$

(a) Dados brutos $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$

(b) k diferentes valores e frequencias $(x_1,f_1), \ldots, (x_k,f_k)$:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \ldots + f_k} = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_jx_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} f_jx_j.$$

(c) k diferentes valores e frequencias relativas $(x_1, f_1^*), \ldots, (x_k, f_k^*)$:

$$\bar{x} = \frac{f_1^* x_1 + f_2^* x_2 + \ldots + f_k^* x_k}{f_1^* + f_2^* + \ldots + f_k^*} = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j^* x_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j^*} = \sum_{j=1}^{k} f_j^* x_j .$$

Obs. Em (b) e (c) as médias são ponderadas com pesos f_j e f_j^*, j = 1,...,k (*weighted mean*).

(d) k intervalos de classe com pontos médios e frequencias $(x_1^*, f_1), \ldots, (x_k^*, f_k)$:

$$\bar{x} \cong \frac{f_1 x_1^* + f_2 x_2^* + \ldots + f_k x_k^*}{f_1 + f_2 + \ldots + f_k} = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j x_j^*}{\sum_{j=1}^{k} f_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} f_j x_j^* .$$

Propriedades da média

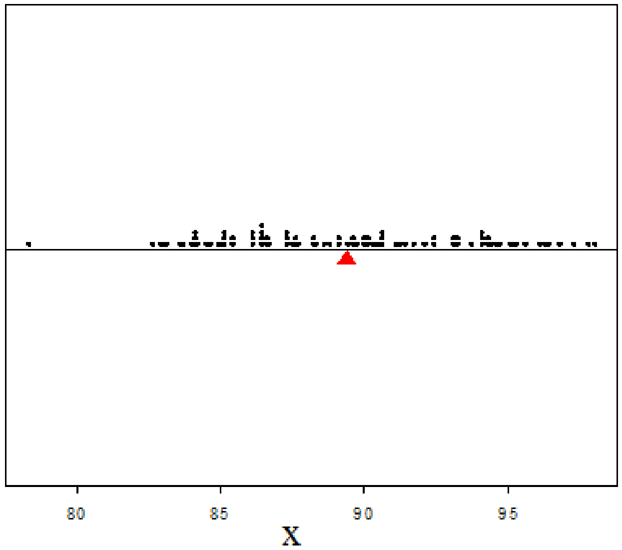
P1. Se $y_i = a + x_i$, i = 1,...,n, a um número real, então $\bar{y} = a + \bar{x}$.

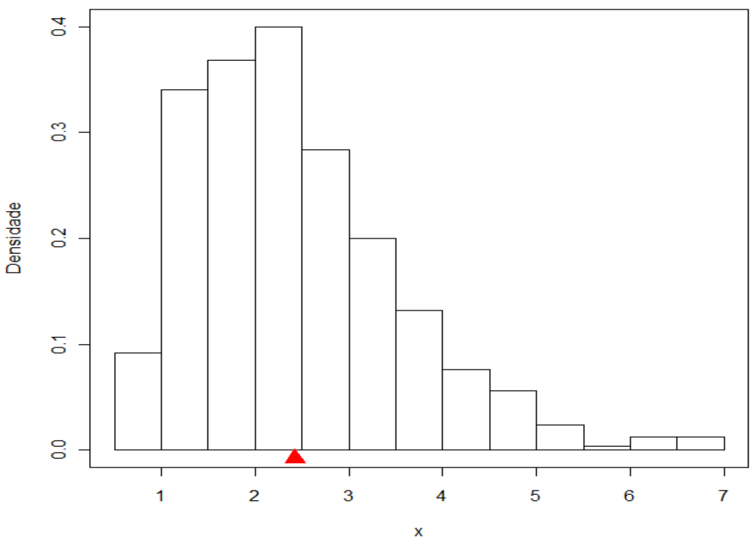
P2. Se $y_i = bx_i$, i = 1,...,n, b um número real, então $\bar{y} = b\bar{x}$.

P3. Se $y_i = a + bx_i$, i = 1,...,n, a e b números reais, então $\bar{y} = a + b\bar{x}$.

P4. A média é o centro de gravidade (centro de massa) dos dados.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^{k} f_j(x_j - \bar{x}) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^{k} f_j^*(x_j - \bar{x}) = 0.$$





Propriedades da média

P5. $\sum_{i=1}^{n} (x_i - v)^2$ é minimizada se, e somente se, $v = \bar{x}$.

Curva de sensibilidade (CS).

g_n é uma função de $x_1,\ldots,x_n$: $g_n(x_1,\ldots,x_n)$.

Dados: $x_1,\ldots,x_{n-1}$, g_n. Valor adicional: x.

Como quantificar a mudança em $g_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})$ após a inclusão de x?

$CS(x; x_1,\ldots,x_{n-1}, g_n) = n \{ g_n(x_1,\ldots,x_{n-1}, x) - g_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \}$.

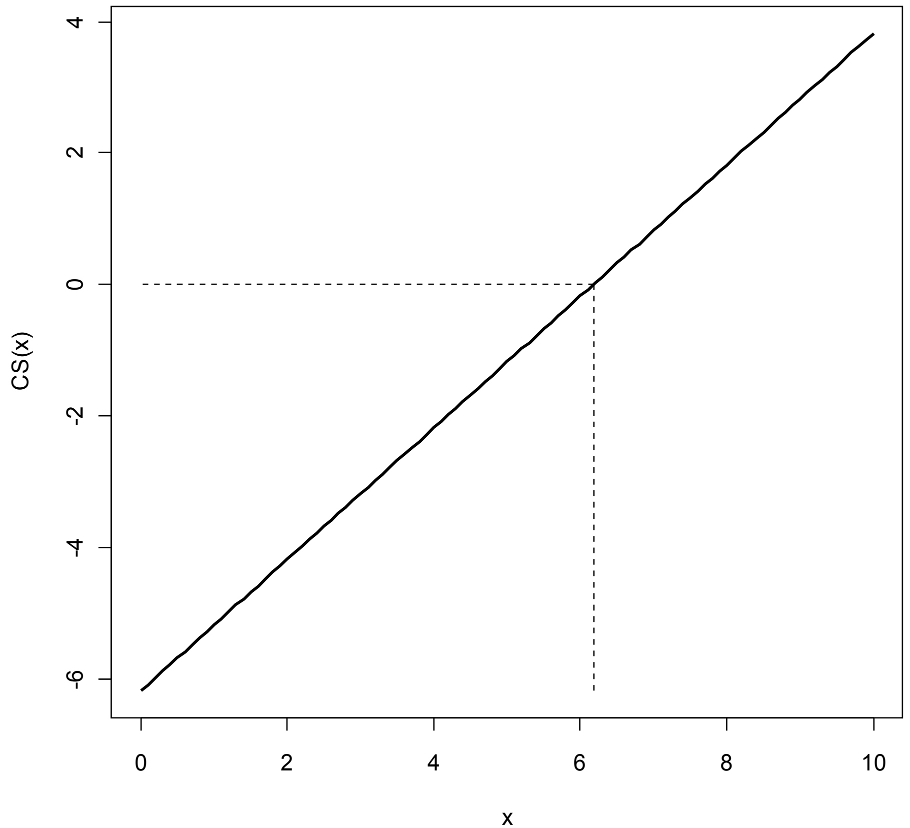
$$CS(x; x_1,\ldots,x_{n-1}, \bar{x}_n) = n\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x}{n} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right)$$

$$= x - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} = x - \bar{x}_{n-1}.$$

Exemplo. Notas de 46 alunos

```
> x = c(c(4.8, 7.8,  9.9,  7.8,  6.8,  7.6,  8.7,  3.8,  6.9,  6.4,
3.6,  7.8, 5.2,  3.5, 8.9, 8.0,  7.0,  6.7,  3.4,  7.5,  5.1,  5.1,
4.9,  4.4,  7.2, 9.8, 3.9,  8.6,  5.2,  6.2,  3.8, 5.2,  4.6,  5.2,
6.6,  6.7,  8.6,  5.1, 4.1, 5.0,  5.0,  4.7, 10.0,  4.8,  6.9, 5.3))
```

```
> (xb = mean(x))

[1] 6.176087


> cs = function(x) { x - xb }

> plot(cs, 0, 10, lwd = 2, ylab
= "CS(x)")

> segments(xb, cs(0), xb, 0, lty
= 2)

> segments(xb, 0, 0, 0, lty = 2)
```



4.2. Mediana (*median*)

Dados ordenados (ou rol): $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$.

Se n é ímpar, a posição central é $c = (n + 1) / 2$.

Se n é par, as posições centrais são $c = n / 2$ e $c + 1 = n / 2 + 1$.

$$M = x_{(c)}, \text{ se } n \text{ é ímpar;}$$
$$= \frac{x_{(c)} + x_{(c+1)}}{2}, \text{ se } n \text{ é par.}$$

Obs. Ao contrário da média, no cálculo de M utilizamos apenas a observação central (ou as duas centrais).

Exemplo. Dados ordenados.

```
> (xord = sort(x))

3.4  3.5  3.6  3.8  3.8  3.9  4.1  4.4  4.6  4.7  4.8  4.8  4.9  5.0  5.0
5.1  5.1  5.1  5.2  5.2  5.2  5.2  5.3  6.2  6.4  6.6  6.7  6.7  6.8  6.9
6.9  7.0  7.2  7.5  7.6  7.8  7.8  7.8  8.0  8.6  8.6  8.7  8.9  9.8  9.9
10.0
```

n = 46: $c = n / 2 = 23$. Logo, $M = (x_{(23)} + x_{(24)}) / 2 = (5{,}3 + 6{,}2) / 2 = 5{,}75$.

Em R: `> M = (xord[23] + xord[24]) / 2`

FOLHA DE S.PAULO

QUINTA-FEIRA, 18 DE MARÇO DE 2010 ★ C1

folha ribeirão

88% dos municípios da região têm menos verde que a média do Estado C1

78 cidades têm menos verde que a média

Só 11 dos 89 municípios da região têm cobertura vegetal acima do índice de 17% apurado em levantamento feito no Estado

O que podemos afirmar sobre a mediana?

É maior do que ou menor do que a média estadual (= 17%) ?

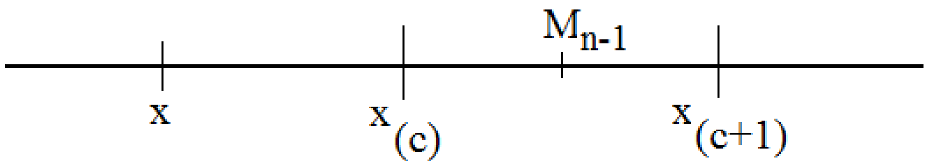
Curva de sensibilidade da mediana

Dados: n – 1 observações, n – 1 é par. Logo, $c = (n – 1) / 2$.

Observação adicional: x (n observações, n é ímpar).

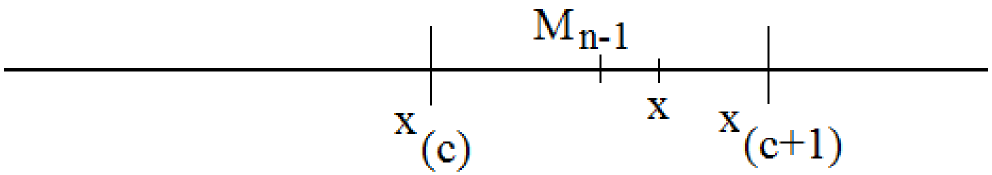
$$CS(x;\, x_1,\ldots,x_{n-1},\, M_n) = n\,\{\, M_n(x_1,\ldots,x_{n-1},\, x) – M_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})\,\}.$$

1. $x < x_{(c)}$:



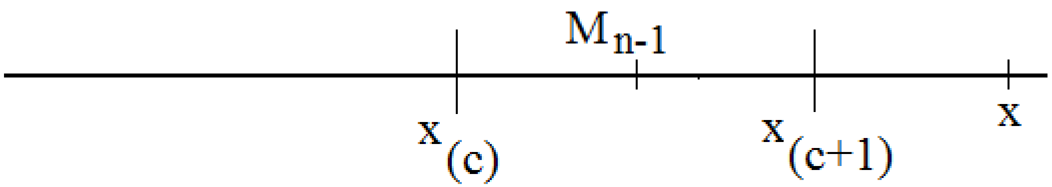
Posição de $x_{(c)}$ passa a ser $(n – 1) / 2 + 1 = (n + 1) / 2$. Logo, $M = x_{(c)}$ (n ímpar).

2. $x_{(c)} \leq x \leq x_{(c+1)}$:



Posição de x: $c + 1 = (n – 1) / 2 + 1 = (n + 1) / 2$. Logo, $M = x$ (n ímpar).

3. $x > x_{(c+1)}$:



Posição de $x_{(c+1)}$: $c + 1 = (n – 1) / 2 + 1 = (n + 1) / 2$. Logo, $M = x_{(c+1)}$ (n ímpar).

Exercício. Obtenha a CS da mediana para n – 1 ímpar.

Curva de sensibilidade da mediana

1. $x < x_{(c)}$: $CS(x; x_1,\ldots,x_{n-1}, M_n) = n\,\{ M_n(x_1,\ldots,x_{n-1}, x) - M_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \}$

$$= n\left(x_{(c)} - \frac{x_{(c)} + x_{(c+1)}}{2} \right) = n\left(\frac{x_{(c)} - x_{(c+1)}}{2} \right).$$

2. $x_{(c)} \leq x \leq x_{(c+1)}$:

$$CS(x; x_1,\ldots,x_{n-1}, M_n) = n\,\{ M_n(x_1,\ldots,x_{n-1}, x) - M_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \}$$

$$= n\left(x - \frac{x_{(c)} + x_{(c+1)}}{2} \right) = n\{x - M_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})\}.$$

3. $x > x_{(c+1)}$: $CS(x; x_1,\ldots,x_{n-1}, M_n) = n\,\{ M_n(x_1,\ldots,x_{n-1}, x) - M_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \}$

$$= n\left(x_{(c+1)} - \frac{x_{(c)} + x_{(c+1)}}{2} \right) = n\left(\frac{x_{(c+1)} - x_{(c)}}{2} \right) = -\,n\left(\frac{x_{(c)} - x_{(c+1)}}{2} \right).$$

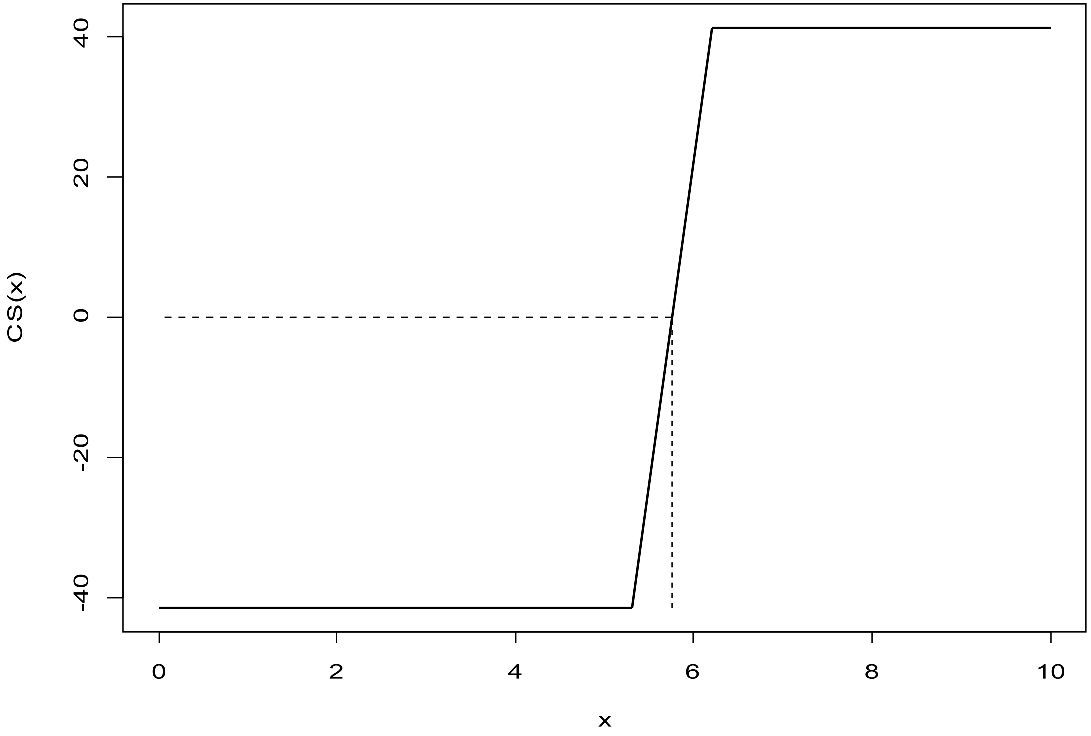
Obs. (a) CS é contínua.

(b) CS em (1) e (3) não depende de x.

Exemplo

$n = 46$. $M_{n-1} = 5{,}75$. $c = 23$. $x_{(c)} = 5{,}3$ e $x_{(c+1)} = 6{,}2$.

1. $x < x_{(c)}$: $CS(x) = 46 \times (5{,}3 - 6{,}2) / 2 = -41{,}4$.
2. $x_{(c)} \leq x \leq x_{(c+1)}$: $CS(x) = 46 \times (x - 5{,}75)$
3. $x > x_{(c+1)}$: $CS(x) = 46 \times (6{,}2 - 5{,}3) = 41{,}4$.



Obs. A mediana é mais resistente do que a média.

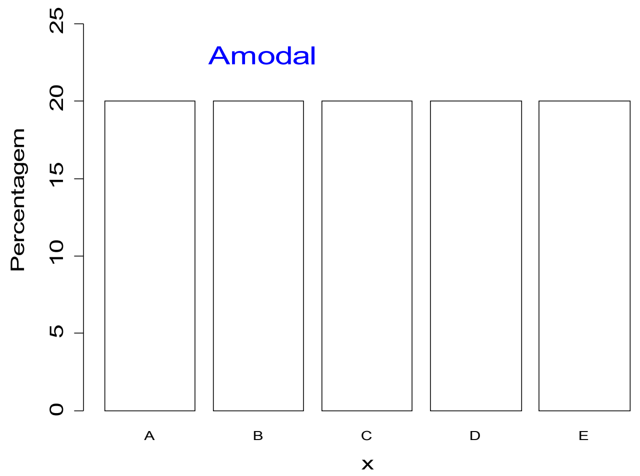
4.3. Moda (*mode*)

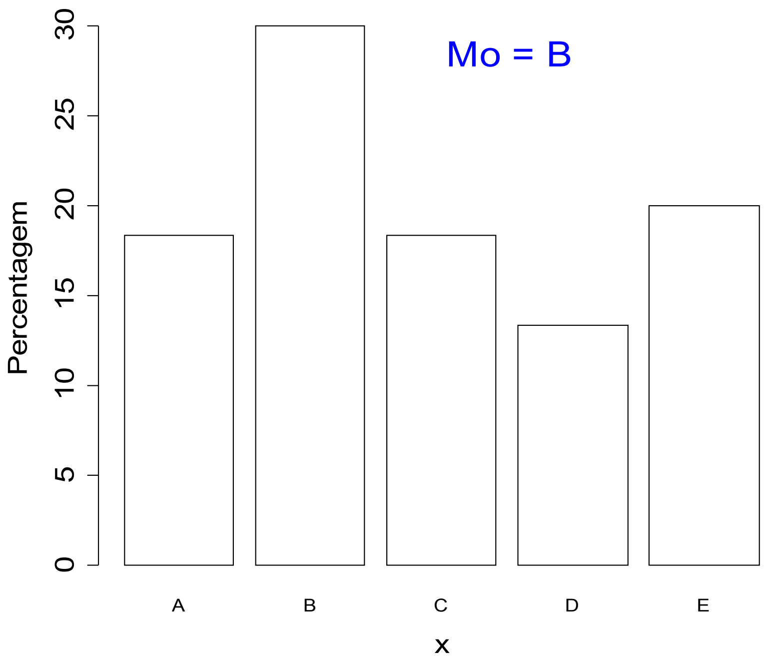
É o valor com maior frequencia. Não necessariamente existe.

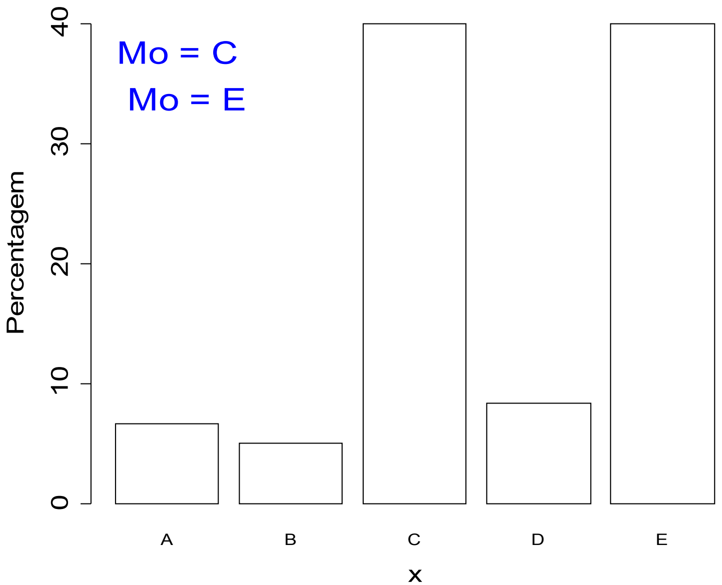
Pode haver mais de uma moda.

Quantitativas: menos utilizada do que a média e a mediana.

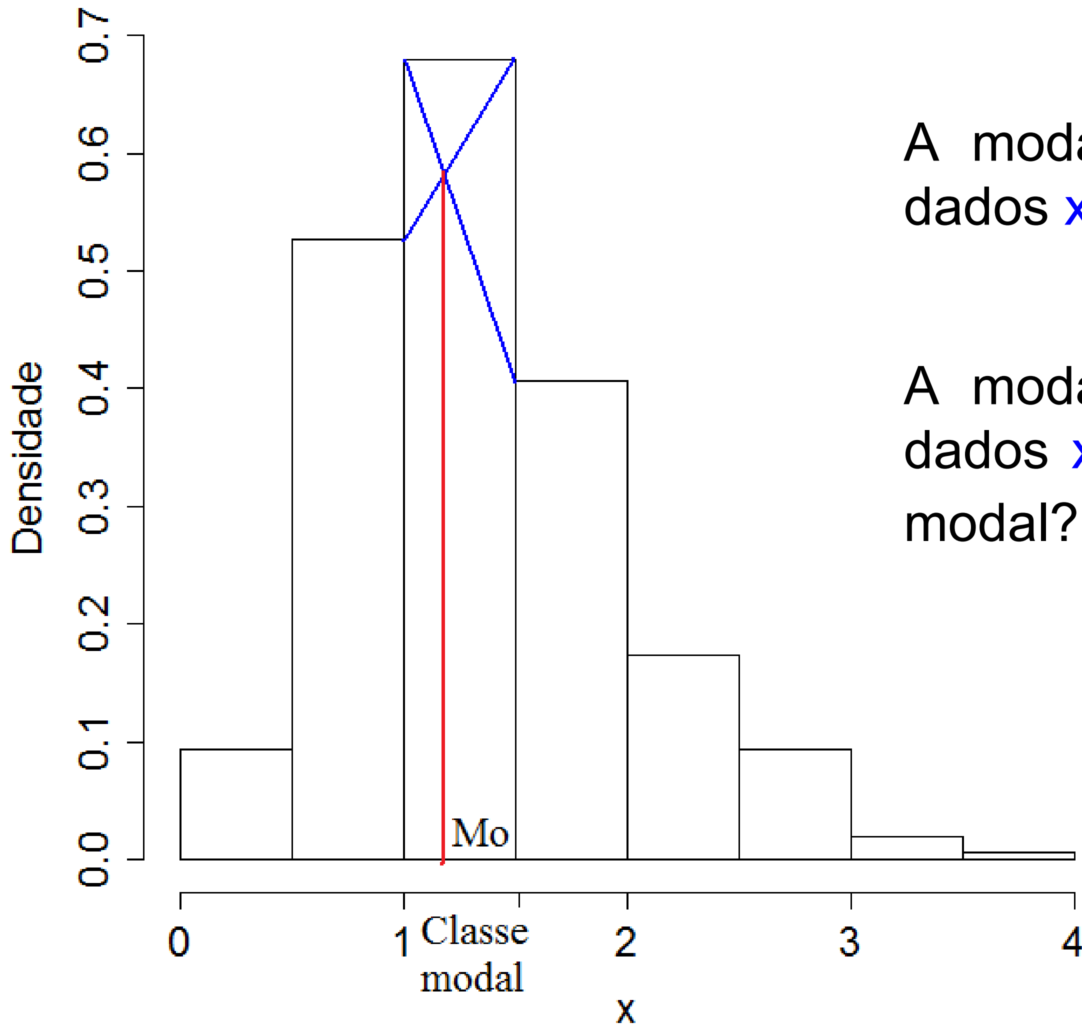
Qualitativas nominais: somente a moda pode ser calculada.







Cálculo aproximado para variável quantitativa em classes



A moda calculada a partir dos dados $x_1,\ldots,x_n$ é igual a Mo?

A moda calculada a partir dos dados $x_1,\ldots,x_n$ pertence à classe modal?

4.4. Média aparada (*trimmed mean*)

Chamada de média winsonrizada (*Winsorized mean*).

Média aparada de 100α%: média aritmética dos dados após a eliminação das 100α% menores e das 100α% maiores observações, $0 \leq \alpha < ½$.

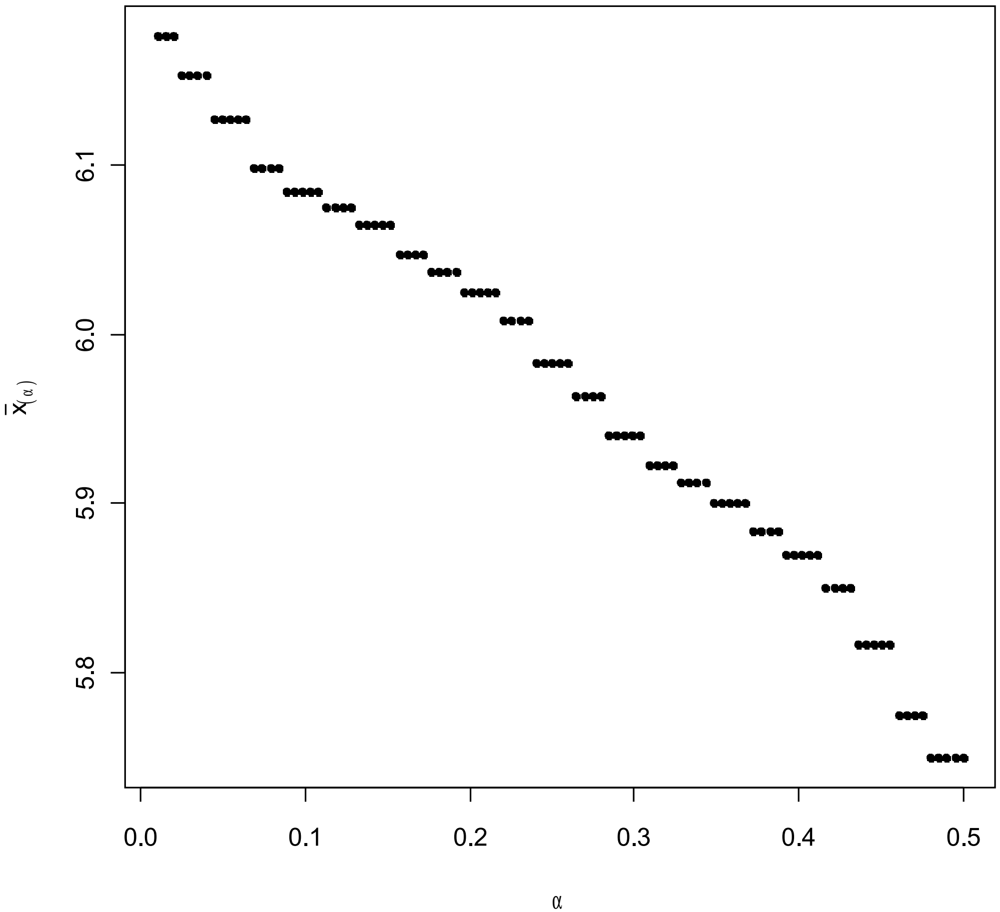
Se n = 20 e α = 0,1, eliminanos as duas menores (10% $\times$ 20 = 2) e as duas maiores observações, restando 16.

$$\bar{x}_{(\alpha)} = \frac{x_{(3)} + x_{(4)} + \ldots + x_{(18)}}{16}.$$

Obs. (a) A média aparada é mais resistente do que a média.
(b) A mediana é um caso particular em que $\alpha = ½ - 1 / (2n)$.

Exemplo. Notas de 46 alunos

```
> x = c(4.8, 7.8,  9.9,  7.8,  6.8,  7.6,  8.7,  3.8,  6.9,  6.4,
3.6,  7.8, 5.2,  3.5, 8.9, 8.0,  7.0,  6.7,  3.4,  7.5,  5.1,  5.1,
4.9,  4.4,  7.2, 9.8, 3.9,  8.6,  5.2,  6.2,  3.8, 5.2,  4.6,  5.2,
6.6,  6.7,  8.6,  5.1, 4.1, 5.0,  5.0,  4.7, 10.0,  4.8,  6.9, 5.3)

> (xb = mean(x))

[1] 6.176087

> (xa5 = mean(x, trim = 0.05))

[1] 6.12619

> mean(x, trim = 0.1)

[1] 6.08421

> xa = function(alfa)
{mapply(function (a0) mean(x,
trim = a0), alfa)}

> plot(xa, 0.01, 0.5, xlab =
expression(alpha),ylab =
expression(bar(x)[(alpha)]),
type = "p", pch = 20)
```



4.5. Média geométrica (*geometric mean*)

Exemplo. Em um certo mês o preço de um produto aumentou 10%. No mês seguinte diminui 7% e no terceiro mês aumentou 5%. De quanto foi a mudança média no preço?

Se $x_1,\ldots,x_n$ são positivos, a média geométrica é definida como

$$m_g = (x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n)^{1/n} = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}.$$

Obs. Pode ser calculada usando logaritmos.

$$\log(m_g) = \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(x_i) = \overline{\log(x)} \Rightarrow m_g = \exp\left(\overline{\log(x)}\right).$$

Exemplo. No 1º mês o preço foi multiplicado por 1,10. Nos outros dois meses o fator de correção foi 0,93 e 1,05.

A correção total nos três meses foi $1{,}10 \times 0{,}93 \times 1{,}05 = 1{,}07415$.

Mudança média = $1{,}07415^{1/3} = 1{,}024130$.

Houve um aumento médio mensal de cerca de 2,4%.

Três correções sucessivas de 1,024130 têm o mesmo efeito das correções (+10%, -7%, +5%).

4.6. Média harmônica (*harmonic mean*)

Exemplo. Em três semanas de trabalho um viajante percorreu trechos de 400 km com velocidades de 60, 50 e 40 km/h. De quanto foi a velocidade média?

Se $x_1,...,x_n$ são diferentes de 0, a média harmônica é definida como

$$m_h = \frac{1}{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) / n}.$$

Exemplo. Os tempos de viagem (em h) foram 400 / 60 = 6,67, 400 / 50 = 8 e 400 / 40 = 10.

Tempo médio de viagem = (6,67 + 8 + 10) / 3 = 8,22 h.

Velocidade média = 400 km / 8,22 h = 48,65 km/h.

Velocidade média = m_h = 1 / {(1 / 60 + 1 / 50 + 1 / 40) / 3} = 48,65 km/h.

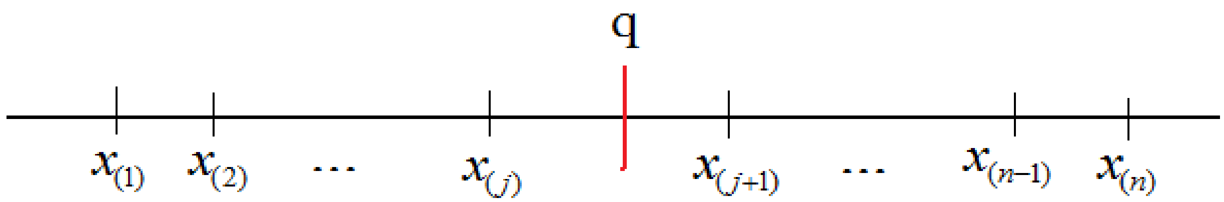
Desigualdade das médias. Se $x_1,...,x_n$ são positivos, então

$$m_h \leq m_g \leq \bar{x}.$$

4.7. Quantil (*quantile*)

Chamado de separatriz.

Provocam uma divisão nos dados ordenados.



Encontramos j observações menores do que ou iguais a q.
Chamamos q o quantil j/n (ou $100 \times j / n$ %), denotado por $q_{j/n}$.

Obs. Neste exemplo $q_{j/n}$ não é único.

Em geral, temos os quantis q_α , $0 \leq \alpha \leq 1$.

Quartis: $Q_1 = q_{0,25}$, $Q_2 = q_{0,5} = M$ e $Q_3 = q_{0,75}$.

Decis: $q_{0,1}$, $q_{0,2}$,..., $q_{0,8}$, $q_{0,9}$.

Percentis: $q_{1\%}$, $q_{2\%}$,..., $q_{98\%}$, $q_{99\%}$.

Obs. Informalmente dizemos que os (três) quartis dividem os dados em quatro intervalos cada um contendo 25% das observações.

Quantis em R

Nove diferentes maneiras de calcular. A opção *default* (`type = 7`) difere do Minitab, SAS e SPSS.

Exemplo. Notas de 46 alunos (lâmina 15).

```
> summary(x)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  3.400   4.825   5.750   6.176   7.575  10.000
> quantile(x)
    0%    25%    50%    75%   100%
 3.400  4.825  5.750  7.575 10.000

> (alfa = seq(0.1, 0.9, by = 0.1))
   [1] 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9
> (decis = quantile(x, probs = alfa))
 10%  20%  30%  40%  50%  60%  70%  80%  90%
3.85 4.70 5.00 5.20 5.75 6.70 7.10 7.80 8.65
> (decisSAS = quantile(x, probs = alfa, type = 3))
10% 20% 30% 40% 50% 60% 70% 80% 90%
3.8 4.6 5.0 5.1 5.3 6.7 7.0 7.8 8.6
```