07 – Grafos: árvores geradoras mínimas

SCC0503 – Algoritmos e Estruturas de Dados II

Prof. Moacir Ponti Jr.
www.icmc.usp.br/~moacir

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – USP

2011/1

Sumário

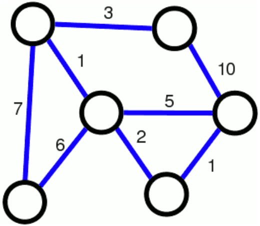
1. Conceitos
   - A Propriedade dos ciclos
   - A Propriedade das partições
2. Algoritmos
   - Prim-Jarník
   - Kruskal
3. Outras árvores geradoras

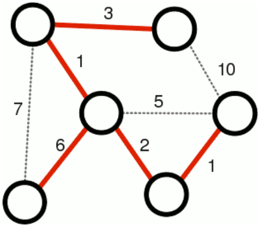
Sumário

1. Conceitos
   - A Propriedade dos ciclos
   - A Propriedade das partições
2. Algoritmos
   - Prim-Jarník
   - Kruskal
3. Outras árvores geradoras

Subgrafo gerador

- Subgrafo de um grafo G que contem todos os vértices de G





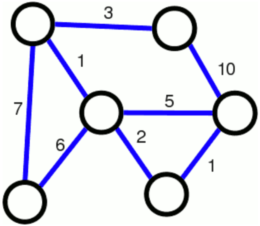
Conceitos

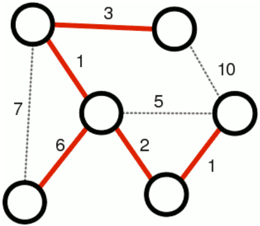
Subgrafo gerador

- Subgrafo de um grafo G que contem todos os vértices de G

Árvore geradora

- Subgrafo gerador conexo e sem ciclos.





Conceitos

Subgrafo gerador

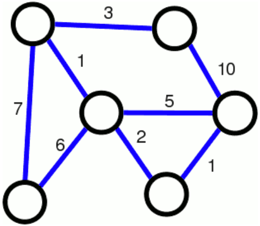
- Subgrafo de um grafo G que contem todos os vértices de G

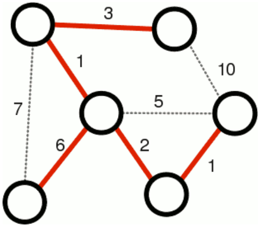
Árvore geradora

- Subgrafo gerador conexo e sem ciclos.

Árvore geradora mínima (MST)

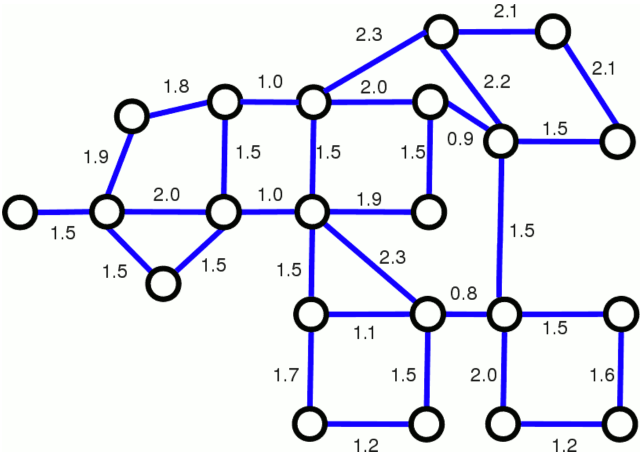
- Árvore geradora de um grafo ponderado cuja soma dos pesos das arestas é mínima.



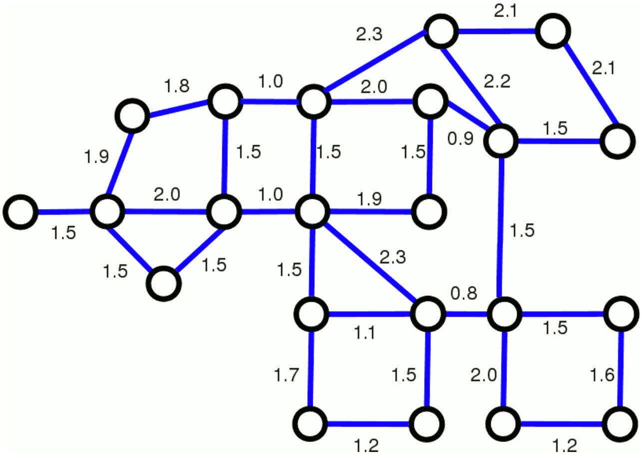


Aplicações

Dado um grafo com as principais avenidas e cruzamentos de uma cidade. Onde escolher construir uma estação policial, ou um shopping?



Se os vértices são ilhas e as arestas representam a possibilidade de construir uma ponte entre duas ilhas. Desejamos conectar todas as ilhas por pontes com o menor custo.

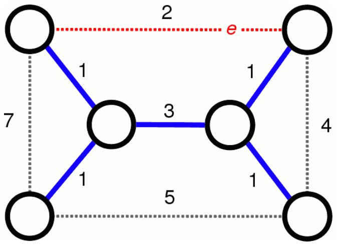


Sumário

1. Conceitos
   - A Propriedade dos ciclos
   - A Propriedade das partições
2. Algoritmos
   - Prim-Jarník
   - Kruskal
3. Outras árvores geradoras

A Propriedade dos ciclos

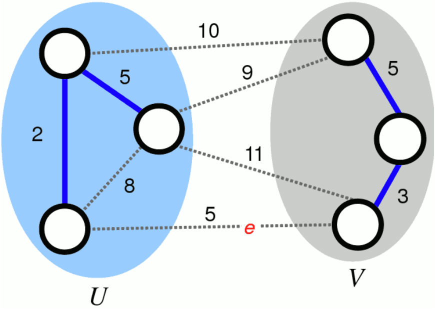
- Seja T uma árvore geradora de um grafo ponderado G.
- Sejam e uma aresta de G fora de T, e C um ciclo formado por $e+T$.
- Se T é uma árvore geradora **mínima**, para cada aresta f em C, $peso(f) \leq peso(e)$.
- se $peso(f) > peso(e)$, é possível obter uma árvore geradora de menor peso total trocando f por e.
  - no exemplo ao lado, como e não é máxima no ciclo C, T não é uma MST.



A Propriedade das partições (ou cortes)

- Considere uma partição dos vértices de G em dois subconjuntos disjuntos U e V.
- Seja e a aresta de pelo mínimo que conecta U a V
- Existe uma **árvore geradora mínima** de G que contém e.

- Para demonstrar, assuma que T não contém e e considere o ciclo C que seria formado por $e + T$, sendo f uma das arestas de C entre U e V.
- pela propriedade dos ciclos, $peso(f) > peso(e)$, o que não acontece pois e é a aresta de peso mínimo, e portanto podemos substituir f por e.



Sumário

1. Conceits
   - A Propriedade dos ciclos
   - A Propriedade das partições
2. Algoritmos
   - Prim-Jarník
   - Kruskal
3. Outras árvores geradoras

Prim-Jarník

- Similar ao algoritmo de Dijkstra
  - Parte de um vértice arbitrário s e gera a MST percorrendo as arestas mínimas entre s e todos os outros vértices do grafo.
  - Em cada passo adiciona à MST a menor aresta ligando a MST atual ao resto do grafo, bem como o vértice u oposto através dela.
- Pode ser implementado com tempo $O((|V| + |A|)\log(|V|))$, mas a implementação simples baseada no Dijkstra é de ordem $O(|V|^2 + |A|)$.

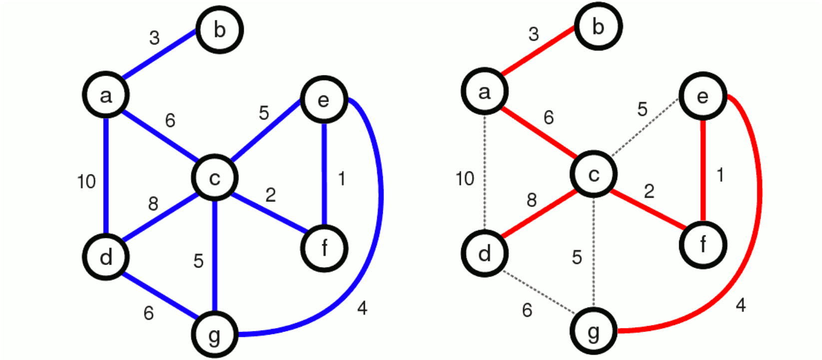
Kruskal

- Une arestas de menor peso sem formar ciclos para encontrar a MST
- Algoritmo com complexidade $O((|V| + |A|)\log(|V|))$
  - também é um algoritmo guloso que encontra a solução ótima.
  - o algoritmo de Prim-Jarník é mais simples de se implementar.
- OBS: Dijkstra, Prim e Kruskal são alguns dos raros algoritmos gulosos que encontram a solução ótima.

Kruskal

1. Cria um novo grafo T com todos os vértices de G e nenhuma aresta.
2. Faça uma lista de todas as arestas em G, e ordene de forma crescente por peso.
3. Para cada aresta u, v (na ordem de peso):
   a) se u, v não estão conectados por um caminho T, insira u, v em T.
      - OBS: esse passo garante que T seja uma árvore (se G for conexo), ou uma floresta.

Kruskal



1 (e,f); 2 (c,f); 3 (a,b); 4 (e,g); 5 (c,g); 5 (c,e); 6 (a,c); 6 (d,g); 8 (d,c); 10 (a,d)

Árvore Geradora de Gargalo Mínimo

- Árvore geradora cuja aresta de maior peso é a menor possível.
- Qualquer MST possui essa propriedade.

Outras árvores geradoras

Árvore Geradora de Gargalo Mínimo

- Árvore geradora cuja aresta de maior peso é a menor possível.
- Qualquer MST possui essa propriedade.

Árvore Geradora Máxima

- Árvore geradora com peso de arestas total máximo
- Corresponde à MST do grafo com pesos de sinal invertido.

Bibliografia I

SEDGEWICK, R.
Algorithms in C: part 5, 3.ed., Addison-Wesley, 2002.
Minimum Spanning Trees (Cap. 20)

ZIVIANI, N.
Projeto de Algoritmos, 3.ed. Cengage, 2004.
Árvore Geradora Mínima (Seção 7.8)

FEOFILOFF, P.
Árvores geradoras de custo mínimo.
`http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/aulas/mst.html`