Curvas e Superfícies

M.C.F. de Oliveira

Fontes:

D.F. Rogers & J.A. Adams, Mathematical Elements for Computer Graphics, McGraw-Hill, 1999

Hearn & Baker, Cap. 8 (8-8 a 8-18)

An Interactive Introduction to Splines, on-line em

http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Intro.htm

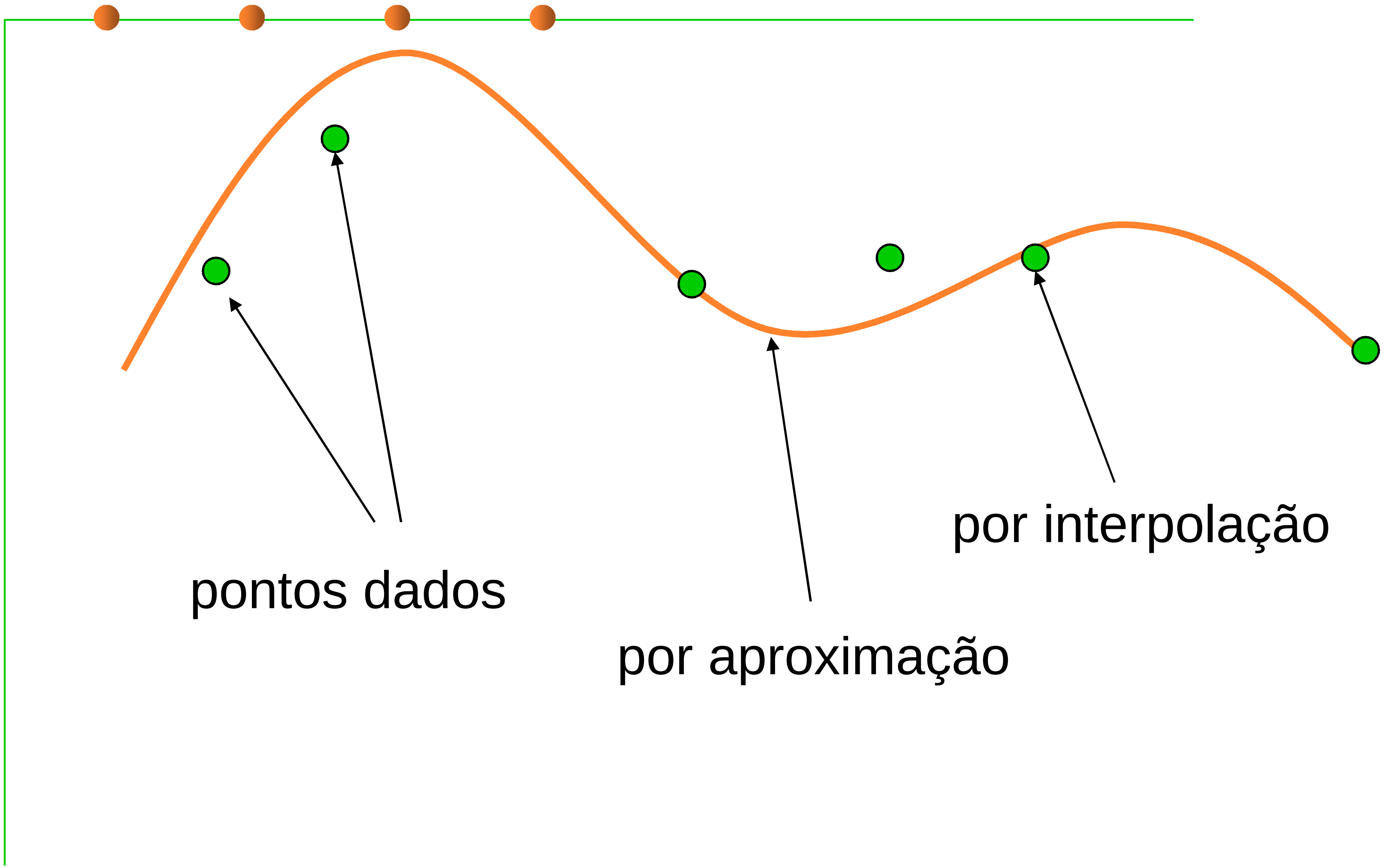
Representação de Curvas

- Duas formas de representação
  - Conjunto de pontos que pertencem à curva
  - Analítica: formulação matemática
  - Vantagens
    - Precisão
    - Armazenagem compacta
    - Facilidade de cálculo (exato) de pontos intermediários
    - Facilidade para calcular propriedades como inclinação e curvatura
    - Facilidade para desenhar as curvas
    - Facilidade para fazer alterações contínuas no formato da curva (*design*)

Ajuste x Aproximação

- Dado um conjunto de pontos, obter uma representação analítica para uma curva que os aproxima
- Ajuste de curvas (*curve fitting*)
  - Uma curva que ajusta (*fit*) os pontos dados passa por todos esses pontos (interpolação)
  - Técnica usual: *splines* cúbicas (aproximação polinomial por partes)
- Aproximação de curvas (*curve fairing*)
  - Uma curva que aproxima (*fair*) os pontos dados pode não passar por nenhum deles, mas mostra a tendência dos dados.
  - Ex. pontos coletados ou obtidos em medidas experimentais

Modelagem de curvas



Representação Implícita x Explícita

- Representação explícita: $y = f(x)$
  - Ex.: $y = mx + b$
  - Uma única equação não representa curvas fechadas, ou com múltiplos valores de y para um dado x
- Representação implícita: $f(x,y) = 0$
  - Ex.: equação implícita de 2o. grau genérica engloba uma variedade de curvas bidimensionais denominadas seções cônicas
  - parábola, hipérbole, elipse, circulo, ...
- Ambas são representações não paramétricas

Representação não-paramétrica

- Limitações
  - Inadequada para representar curvas fechadas, ou com múltiplos valores de y
  - Dependentes do sistema de coordenadas, cuja escolha afeta a facilidade de uso
  - Pontos em uma curva calculados a partir de incrementos uniformes em x não estão distribuídos uniformemente ao longo da curva
    - Qualidade de traçado fica prejudicada

Representação paramétrica

- As coordenadas de pontos na curva são representadas como uma função de um único parâmetro: a posição do ponto na curva é fixada pelo valor do parâmetro
  - Ex. para uma curva 2D que usa t como parâmetro, as coordenadas cartesianas de um ponto na curva são dadas por:

    $x = x(t); y = y(t)$
  - Vetor posição de um ponto: $P(t) = [x(t) \;\; y(t)]$
  - Derivada em P (vetor tangente à curva): $P'(t) = [x'(t) \;\; y'(t)]$
  - Inclinação: $dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt) = y'(t)/x'(t)$

Representação paramétrica

- Adequada para representar curvas fechadas e com múltiplos valores de *y* para um dado *x*
- Forma não-paramétrica pode ser obtida eliminando-se o parâmetro
  - dado *x*, para determinar *y* basta obter o valor do parâmetro *t*, a partir de *x*, e usar esse valor para obter *y*
- Independente do sistema de coordenadas
- Ambas as formas, paramétrica e não paramétrica, têm vantagens e desvantagens em situações específicas!

Exemplo

- Dados 2 vetores que especificam posições iniciais P_1 e P_2, possível representação paramétrica do segmento de reta:

  $$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t, \qquad 0 \le t \le 1$$

- Como P(t) é vetor de posição, cada um de seus componentes têm uma representação paramétrica x(t) e y(t) entre P_1 e P_2, i.e.,

  $$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t, \qquad 0 \le t \le 1$$

  $$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t, \qquad 0 \le t \le 1$$

  - Ex.

Exemplo

- Círculo no primeiro quadrante
  - Representação paramétrica não é única!
  - Ex.

Curvas de Bézier

- Técnicas de aproximação de curvas são muito usadas em ambientes de projeto (CAD) interativos, por serem mais intuitivas do que técnicas de ajuste
- Método adequado para o *design* de curvas e superfícies de forma livre em ambientes interativos foi desenvolvido por Pierre Bézier
- Uma curva de Bézier é determinada por um conjunto de pontos de controle (polígono de controle)
- Curvas podem ser lineares, quadráticas, cúbicas, etc., dependendo do número de pontos de controle e da ordem do polinômio usado para obter a aproximação

Curvas de Bézier

- Ver http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Bezier.htm
- Por construção, as curvas de Bézier passam pelos pontos de controle terminais, i.e.

  $$\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{P}_0 , \qquad \boldsymbol{P}(1) = \boldsymbol{P}_2$$

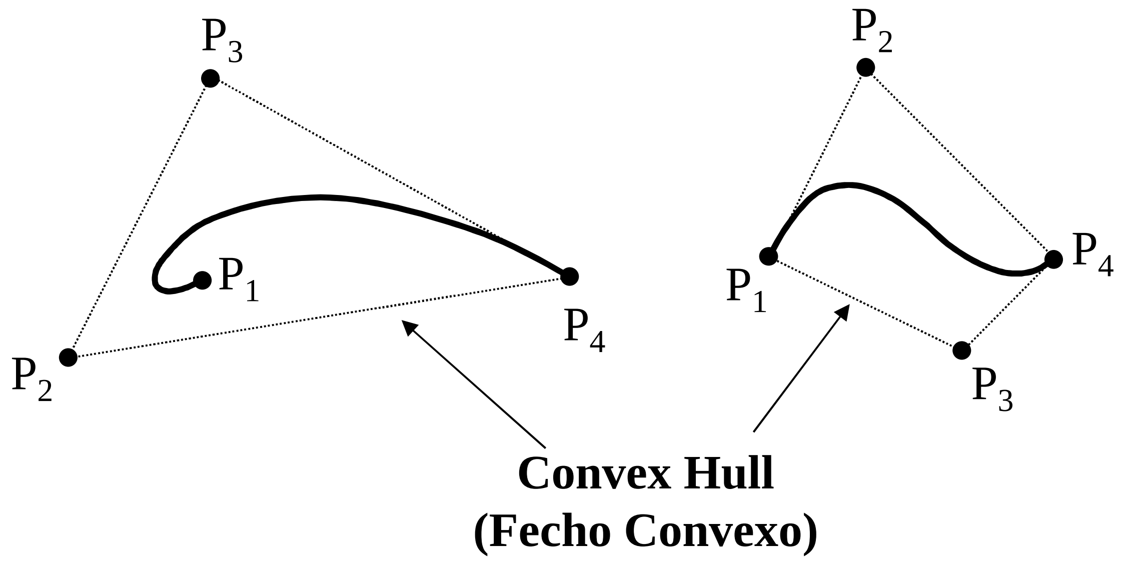
- Matematicamente, uma curva de Bézier paramétrica é definida como

  $$\boldsymbol{P}(t) = \Sigma_{i=0,n} B_i^n(t)\, \boldsymbol{P}_i \qquad\qquad (*)$$

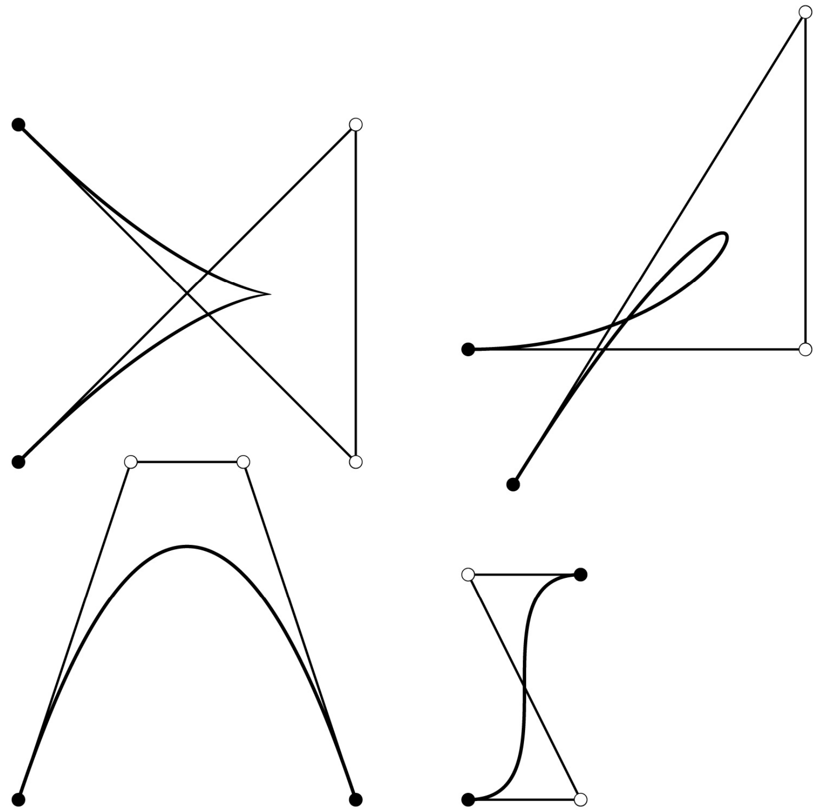
- $B_i^n(t)$ são as funções base de Bernstein de ordem n
- n, o grau das funções base, é igual ao número de pontos do polígono de controle menos 1

Curvas de Bézier

Curvas para pontos de controle, P_1, P_2, P_3, e P_4



Curvas de Bézier



Curvas de Bézier

- Para 'desenhar' a curva que aproxima n+1 pontos dados, pode-se usar o algoritmo iterativo de DeCasteljau:

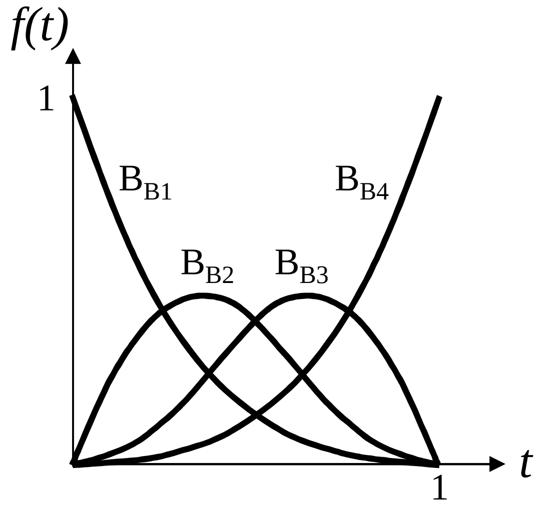
  $\boldsymbol{P}_i^{\,j}(t) = (1-t)\boldsymbol{P}_i^{\,j-1} + t\boldsymbol{P}_{i+1}^{\,j-1}, \quad j = 1, n \quad i = 0, n-j$

- Exemplo para n = 3 em http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Bezier.htm
- Alternativamente, pode-se usar a Eq. (*)

$$\boldsymbol{P}(t) = \Sigma_{i=0,n} B_i^n(t)\,\boldsymbol{P}_i\,, \qquad (*)$$

$$B_i^n(t) = C_n^{\,i}\,(1-t)^{n-i}t^i\,, \qquad C_n^{\,i} = n!\,/\,i!(n-i)!$$

Funções de Blending de Bézier



$$Q(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)P_1 +$$
$$(3t^3 - 6t^2 + 3t)P_2 +$$
$$(-3t^3 + 3t^2)P_3 +$$
$$t^3 P_4$$

Polinômios de Bernstein:

$$B_{B_1} = (1-t)^3 \qquad B_{B_2} = 3t(1-t)^2$$
$$B_{B_3} = 3t^2(1-t) \qquad B_{B_4} = t^3$$

Curvas de Bézier

- A forma da curva ‘acompanha’ a forma do polígono de definição $\Rightarrow$ formulação adequada para o ‘*design*’ interativo de formas
- A curva está contida no fecho convexo do polígono de definição
- O primeiro e último pontos do polígono de controle pertencem à curva
- Os vetores tangentes à curva nos seus pontos extremos têm a mesma direção que o primeiro e último segmentos do polígono de controle
- A curva é invariante sob transformações geométricas afins (rotação, translação, escala, ...)

Curvas de Bézier - Exemplo

- Dados P_0 [1 1], P_1 [2 3], P_2 [4 3], P_3 [3 1], determinar 7 pontos na curva de Bézier, usando as Eqs. (*) para $n = 3$:

$$\boldsymbol{P}(t) = \Sigma_{i=0,3}\, B_i^3(t)\, \boldsymbol{P}_i\,, \qquad (*)$$

$$B_i^3(t) = C_3^i\, (t-1)^{3-i} t^i\,, \qquad C_3^i = 3!\,/\,i!(3-i)!$$

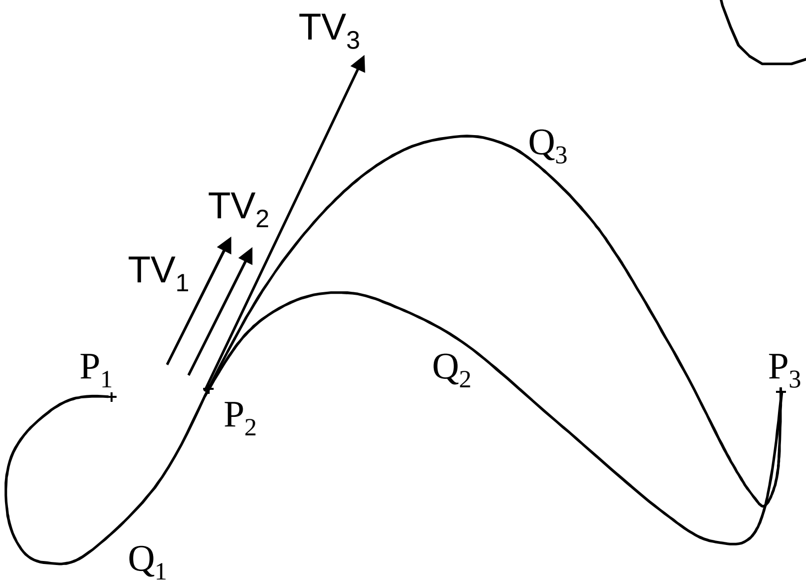
Curvas de Bézier

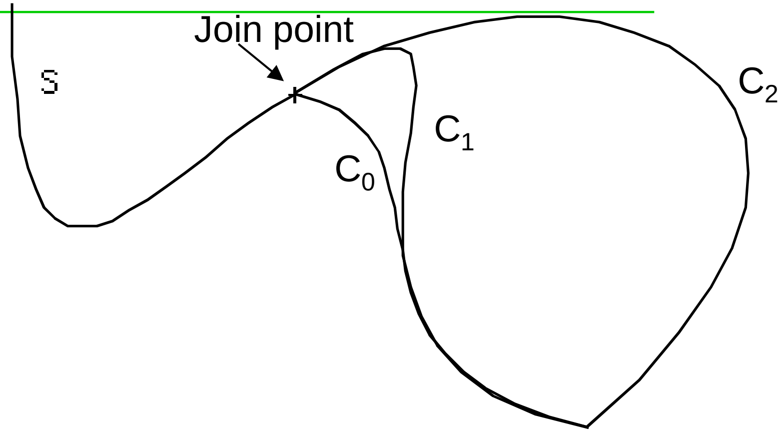
- Curvas complexas podem ser obtidas ‘concatenando’ várias curvas de grau baixo: aproximação por partes
  - Continuidade de ordem 0: junção das curvas (fácil: $P_n = P'_0$)
  - Continuidade de ordem 1: tangentes às curvas no ponto de junção são coincidentes: P_{n-1}, $P_n = P'_0$, P'_1 devem ser colineares

Continuidade

- Nos pontos de junção das curvas
  - Continuidade geométrica G^0 : dois segmentos de curva se juntam
  - Continuidade geométrica G^1 : os vetores tangentes aos dois segmentos no ponto de junção têm a mesma direção
  - Continuidade paramétrica C^1: os vetores tangentes aos dois segmentos no ponto de junção têm a mesma direção e mesma magnitude
    - ($C^1 \Rightarrow G^1$ a menos que o vetor tangente seja = [0, 0, 0])
  - Continuidade paramétrica C^n: direção e magnitude dos vetores tangentes até a n-ésima derivada são iguais no ponto de junção

Exemplos de Junção





S se junta a C^0, C^1, e C^2 com continuidade C^0, C^1, e C^2, respectivamente.

Q_1 e Q_2 têm continuidade C^1 (tangentes TV_1 e TV_2 são iguais). Q_1 e Q_3 têm apenas continuidade G^1.

Superfícies de Bézier

- Analogamente, pode-se definir superfícies que aproximam um conjunto de pontos no espaço
- A formulação matemática de superfícies de Bézier

é dada por

$$\mathbf{S}(u,v) = \Sigma_{i=0,n}\Sigma_{j=0,m}B_i^n(u)B_j^m(v)\mathbf{p}_{ij} \ ,0 \leq u,v \leq 1$$

  - sendo que $(n+1)(n+1)$ pontos de controle $\mathbf{P}_{ij}$ definem um poliedro de controle da superfície
  - Ver http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Inter.htm

Curvas B-Spline

- Uma B-spline de ordem *k* que aproxima *n+1* pontos de controle ($\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, ... , $\mathbf{p}_n$) é dada por

$$\mathbf{P}(t) = \Sigma_{i=0,n} N_{i,k}(t)\mathbf{p}_i \ ,$$

$$2 \leq k \leq n+1, \ t_{min} \leq t \leq t_{max}$$

$t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n+k}$ são os nós da parametrização

Curvas B-Spline

Cada ponto de controle é associado a uma função base $N_{i,k}$ dada pelas equações recursivas:

$$N_{i,k}(t) = N_{i,k-1}(t)(t-t_i)/(t_{i+k-1}-t_i) + N_{i+1,k-1}(t)(t_{i+k}- t)/(t_{i+k}- t_{i+1}),$$

$$N_{i,1} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

(Eqs. de Cox-de-Boor)

Curvas B-Spline

- O vetor de nós (t_0 , t_1 , ... , t_{n+k}) é dado
- $N_{i,k}$ é um polinômio de ordem k (grau $k-1$) em cada intervalo $t_i < t < t_{i+1}$
- k deve ser no mínimo 2 (linear) e no máximo $n+1$ (o número de pontos de controle)
- Cada função base é definida sobre k sub-intervalos do intervalo total de variação de t, a partir de t_i
- O intervalo de variação de t é dividido em $n + k$ sub-intervalos pelos $n + k + 1$ valores do vetor de nós
- As funções base têm continuidade C^{k-2} ao longo dos nós

http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Basis.htm

Curvas B-Spline

- As funções-base B-spline, assim como as de Bézier, são não-negativas ($N_{i,k} >= 0$)
- As funções têm a propriedade de "partição da unidade": $\Sigma_{i=0,n} N_{i,k}(t) = 1, \quad t_{k-1} < t < t_{n+1}$

  portanto, $0 \leq N_{i,k} \leq 1$
- Como $N_{i,k} = 0$ para $t \leq t_i$ ou $t \geq t_{i+k}$, um ponto de controle $\mathbf{p}_i$ influencia a curva apenas na região em que $t_i < t < t_{i+k}$

Vetores de Nós

- As formas das funções base $N_{i,k}$ são determinadas pelo espaçamento relativo dos nós $(t_0 , t_1 , \ldots , t_{n+k})$
  - Escalar ou transladar o vetor de nós não afeta a forma das funções base ou da B-spline resultante
- Vetores de nós podem ser de três tipos:
  - uniformes: $t_{i+1} - t_i = \text{constante}$
  - uniformes abertos: vetores uniformes com *k* valores de nós idênticos em cada extremidade:

    $t_i = t_0 , i < k; t_{i+1} - t_i = \text{const} , k\text{-}1 \leq i < n+1,$

    $t_i = t_{k+n}, i \geq n+1$
  - não uniformes: caso geral, a única restrição é $t_i \leq t_{i+1}$

Vetores de Nós - Exemplos

- Uniforme: [0,1,2,3,4,5]
- Uniforme aberto: [0,0,0,1,2,3,4,4,4] *(k=3, n=5)*
- Não-uniforme: [0, 2, 3, 6, 9]

  - Ver http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Basis.htm
  - Ver http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/None.htm

B-splines - Propriedades

- Consistem de *(n-k+2)* curvas de ordem *k* unidas com continuidade C^{k-2} nos valores dos nós (t_0, t_1 , ... , t_{n+k})
- Controle local da forma:
  - cada ponto da curva é afetado por *k* pontos de controle
  - cada ponto de controle afeta *k* segmentos
- Para um vetor de nós (t_0, t_1 , ... , t_{n+k}), a curva é definida apenas no intervalo do nó t_{k-1} até t_{n+1}
- Curva
  - contida no fecho convexo dos pontos de controle
  - invariante sob transformações afins
  - aproxima os pontos de controle ($\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$,..., $\mathbf{p}_n$)

B-splines Racionais não-uniformes (NURBS)

- Curva B-spline é uma soma ponderada dos seus pontos de controle

  $\mathbf{P}(t) = \Sigma_{i=0,n} N_{i,k}(t)\, \mathbf{p}_i\,, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_{n+1}$ (*)

  - os pesos $N_{i,k}$ têm a propriedade $\Sigma_{i=0,n} N_{i,k}(t) = 1$

- Como os pesos dependem apenas do vetor de nós, é útil associar a cada ponto de controle um peso extra w_i

  $\mathbf{P}(t) = \Sigma_{i=0,n} w_i N_{i,k}(t) \mathbf{p}_i / \Sigma_{i=0,n} w_i N_{i,k}(t)$ (**)

B-splines Racionais não-uniformes (NURBS)

- Aumentar o peso w_i aumenta a influência do i-ésimo ponto de controle, atraindo a curva para esse ponto
- Denominador em (**) normaliza os pesos: se w_i = const para todo *i* obtém-se a Eq. (*)
- Os pesos $w_i N_{i,k}$ também satisfazem a condição da "partição da unidade"
- Ver http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Basis.htm

Curvas NURBS

- Representação exata para seções cônicas (elipses, parábolas, hipérboles)
  - Representação única para todos os tipos de curvas!
- Invariantes sob transformações de projeção perspectiva
  - Transformações podem ser aplicadas aos pontos de controle!

Superfícies NURBS

- Analogamente, uma superfície NURBS **S**(u,v) é construída como o produto tensorial de duas curvas NURBS:

$$\mathbf{S}(u,v) = \Sigma_{i=0,nu}\Sigma_{j=0,nv}N_i^{Ku}(u)\ N_j^{Kv}(v)w_{ij}\mathbf{P}_{ij} \ / \ \Sigma_{i=0,nu}\Sigma_{j=0,nv}N_i^{Ku}(u)\ N_j^{Kv}(v)w_{ij}$$

- Ver
http://www.ibiblio.org/enotes/Splines/Intro.htm
http://libnurbs.sourceforge.net/index.shtml

Bibliografia adicional

- Cap. 3 do livro de Azevedo e Conci
- http://www.cs.princeton.edu/~min/cs426/jar/bezier.html
- http://www.cse.unsw.edu.au/~lambert/splines/