**USP – ICMC – SME0123 - Estatística**
1ª prova – 2º/2014

S o l u ç ã o

1. Uma indústria produz artigos cuja massa, em kg, é uma variável aleatória $X$ com função densidade de probabilidade
$$f(x) = \begin{cases} x-8, & \text{se } 8 \leqq x < 9, \\ 10-x, & \text{se } 9 \leqq x < 10, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$
O fabricante vende um artigo por um preço de R\$ 20,00 e garante o reembolso do preço de venda a qualquer cliente se a massa do artigo for inferior a 8,25 kg. O custo de produção está relacionado à massa do artigo de acordo com a expressão $0,05X+0,50$. Calcule o lucro esperado por artigo.
Solução. O lucro, $L$ é uma função da massa, $X$. Se $8 \leqq X < 8,25$, por causa do reembolso, há uma perda igual a $-(0,05X+0,50)$ referente ao custo de produção. Se $8,25 \leqq X < 10$, registra-se um ganho dado por $20,00-(0,05X+0,50) = 19,50-0,05X$. Assim, o lucro é dado por
$$L(X) = \begin{cases} -0,05X-0,50, & \text{se } 8 \leqq X < 8,25, \\ 19,50-0,05X, & \text{se } 8,25 \leqq X < 10, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2}$$
Usando (1) e (2), o lucro esperado é dado por
$$\begin{aligned} E\{L(X)\} &= \int_8^{10} L(x)f(x)dx = \int_8^{8,25} (-0,05X-0,50)(x-8)dx \\ &+ \int_{8,25}^{9} (19,50-0,05x)(x-8)dx + \int_9^{10} (19,50-0,05x)(10-x)dx \\ &= \frac{1}{20}\left(80x - x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_8^{8,25} + \frac{1}{20}\left(-\frac{1}{3}x^3 + 199x^2 - 3120x\right)\Bigg|_{8,25}^{9} \\ &+ \frac{1}{20}\left(3900x - 200x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_9^{10} \\ &= -0,0283854 + 8,93672 + 9,51667 = \text{R\$}\,18,425. \end{aligned}$$

2. Uma empacotadora sofre uma interrupção a cada 10 horas. Um grande lote de produtos exigirá 25 horas de serviço. Durante este tempo, se ocorrerem três ou mais interrupções, considera-se que o funcionamento da empacotadora é insatisfatório. Calcule a probabilidade de que o funcionamento seja satisfatório.
Solução. Supomos que as interrupções ocorrem de acordo com uma distribuição Poisson e a uma taxa igual a 1 a cada 10 horas. Assim, a variável aleatória $X$ que conta o número de interrupções em 25 horas tem distribuição Poisson com média $\mu = (1/10) \times 25 = 2,5$. A função de probabilidade é dada por $f(x) = P(X = x) = e^{-\mu}\mu^x/x!$, $x = 0, 1, 2, \ldots$. Se $X \geqq 3$, o funcionamento é insatisfatório. A probabilidade de que o funcionamento seja satisfatório é dada por $1 - P(X \geqq 3) = P(0 \leqq X < 3) = P(0 \leqq X \leqq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,082 + 0,205 + 0,257 = 0,544$.

3. Três empresas fornecem componentes para um fabricante de equipamentos de telemetria. O fabricante testou por vários anos os componentes recebidos e obteve os dados da tabela abaixo. Um componente selecionado aleatoriamente foi testado e verificou-se que é defeituoso. Qual seria

| Fornecedor | Fração defeituosa | Fração fornecida |
|---|---|---|
| F1 | 0,035 | 0,25 |
| F2 | 0,01 | 0,60 |
| F3 | 0,02 | 0,15 |

o fornecedor deste componente?
SOLUÇÃO. O evento $F_j$ indica um componente fornecido pela empresa $j$, $j = 1, 2, 3$, enquanto $D$ indica um componente defeituoso. Pelos dados da tabela, temos $P(F_1) = 0,25$, $P(F_2) = 0,60$, $P(F_3) = 0,15$, $P(D|F_1) = 0,035$, $P(D|F_2) = 0,01$ e $P(D|F_3) = 0,02$. Calculamos $P(F_j|D)$, $j = 1, 2, 3$, e com base nestas probabilidades, selecionamos o fornecedor do componente defeituoso como sendo o de maior probabilidade. Pela fórmula de Bayes,

$$P(F_j|D) = \frac{P(D|F_j)P(F_j)}{P(D)}, \; j = 1, 2, 3, \tag{3}$$

em que $P(D) = \sum_{k=1}^{3} P(D|F_k)P(F_k) = 0,0175$. Com este resultado, os dados da tabela e (3), obtemos $P(F_1|D) = 0,493$, $P(F_2|D) = 0,338$ e $P(F_3|D) = 0,169$. Portanto, o fornecedor $\mathrm{F}_1$ é o mais provável.

Obs. Em (3) temos $P(F_j|D) \propto P(D|F_j)P(F_j)$, $j = 1, 2, 3$, de modo que é possível responder a pergunta sem calcular o denominador $P(D)$.

4. Em cinco volumes de uma solução foram medidos os tempos de aquecimento em um mesmo bico de gás e as respectivas temperaturas. Os resultados foram os seguintes:
Tempo (min): 22, 20, 19, 23 e 17 e temperatura (°C): 75, 80, 78, 84 e 78.
Qual das duas variáveis apresenta maior variabilidade?
SOLUÇÃO. Como as unidades de medida das variáveis são diferentes, a variabilidade será comparada utilizando o coeficiente de variação $CV$. Para a variável tempo obtemos $\overline{x} = 20,2\,\text{min}$, $s = 2,39\,\text{min}$ e $CV = s/\overline{x} \times 100 = 11,8\%$. Para a variável temperatura obtemos $\overline{x} = 79\,°\text{C}$, $s = 3,32\,°\text{C}$ e $CV = s/\overline{x} \times 100 = 4,2\%$. Logo, a variável tempo apresenta maior variabilidade.

5. Dados coletados durante muitos anos revelam que a espessura de placas de madeira é uma variável aleatória com média 7,0 mm e desvio padrão 0,4 mm.

   (a) Placas com espessura entre 6,2 e 7,2 mm são aceitáveis. Qual a probabilidade de que uma placa selecionada aleatoriamente seja aceitável?
   SOLUÇÃO. Supomos que a variável aleatória espessura, denotada por $X$, tem distribuição normal, ou seja, $X \sim N(7,0; 0,4^2)$. Se $6,2 < X < 7,2$, em mm, a placa é aceitável. A probabilidade deste evento é dada por

$$\begin{aligned} P(6,2 < X < 7,2) &= P\left(\frac{6,2-7,0}{0,4} < \frac{X-7,0}{0,4} < \frac{7,2-7,0}{0,4}\right) \\ &= P(-2,00 < Z < 0,50) = 0,6915 - 0,0228 = 0,6687, \end{aligned}$$

   sendo que na penúltima passagem acima consultamos a Tabela A.3.

   (b) Em um lote de sete placas, qual a probabilidade de que no máximo duas placas sejam inaceitáveis?
   SOLUÇÃO. De acordo com o item 5a, a probabilidade de que uma placa seja inaceitável é $p = 1 - 0,6687 = 0,3313$. Supondo independência, o número de placas inaceitáveis $Y$ em um lote de sete placas é uma variável aleatória com distribuição binomial, ou seja,

$Y \sim B(n = 7; p = 0,3313)$. Devemos calcular $P(0 \leqq Y \leqq 2)$, dada por

$$\binom{7}{0} 0,3313^0 \times 0,6687^7 + \binom{7}{1} 0,3313^1 \times 0,6687^6 + \binom{7}{2} 0,3313^2 \times 0,6687^5 = 0,5754.$$