Algoritmos e Estruturas de Dados II

Grafos - Busca

Profa. Elaine Parros Machado de Sousa
alterações: Cristina Dutra de Aguiar Ciferri

Material baseado em aulas dos professores:
Gustavo Batista, Robson Cordeiro, Moacir Ponti Jr.,
Maria Cristina Oliveira e Thiago A. S. Pardo

Busca em Grafos: Motivação

- Percorrer um grafo é um problema fundamental
  - deve-se ter uma forma sistemática de visitar as arestas e os vértices
  - o algoritmo deve ser suficientemente flexível para se adequar à diversidade de grafos
- Requisitos
  - não deve haver repetições (desnecessárias) de visitas a um vértice e/ou aresta
  - todos os vértices e/ou arestas devem ser visitados

Busca em Grafos: Tipos de Busca

- Exemplos:
  - dado um grafo **G = (V, A)** e um vértice **v** ∈ **V** => encontrar todos os vértices em **G** que estão conectados a **v**.
  - dado um grafo **G = (V, A)** => visitar todos os vértices de **G**.
- Duas maneiras principais de realizar essas tarefas:
  - **Busca em profundidade**
  - **Busca em largura**

Busca em Largura: Definição

- *Breadth-First Search – BFS*
  - expande a fronteira entre vértices descobertos e não descobertos uniformemente através da largura da fronteira.
- Características
  - o algoritmo descobre todos os vértices a uma distância *k* do vértice origem antes de se descobrir qualquer vértice a uma distância *k+1*
  - a busca em largura permite descobrir todos os vértices alcançáveis a partir de um vértice de origem **u**, com o menor número de arestas entre **u** e todos os outros vértices

Busca em Largura: Estratégia

- Cada vértice é colorido de branco, cinza ou preto.
  - todos os vértices são inicialmente brancos.
  - quando um vértice **v** é "descoberto" pela primeira vez ele torna-se cinza.
  - quando todos os vértices adjacentes a **v** forem "descobertos", **v** torna-se preto.

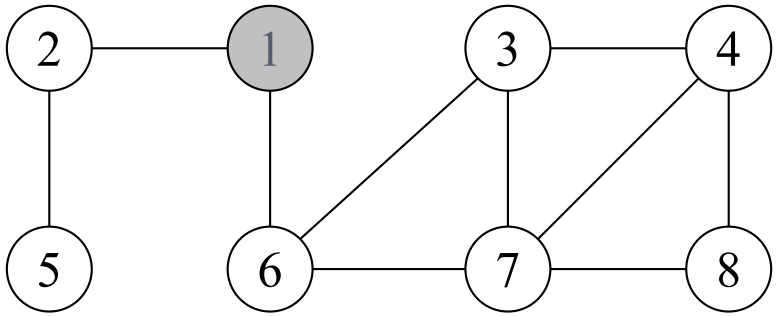
Busca em Largura: Estratégia

- Observações
  - vértices cinza e preto já foram "descobertos", mas são diferenciados para assegurar que a busca ocorra em largura
  - se **(u,v)** ∈ **A** e o vértice **u** é preto, então o vértice ***v*** tem que ser cinza ou preto.
    - todos os vértices adjacentes a um vértice preto já foram "descobertos"
  - vértices cinza podem ter alguns vértices adjacentes brancos, representando a fronteira entre vértices "descobertos" e não "descobertos".

Busca em Largura: Fila

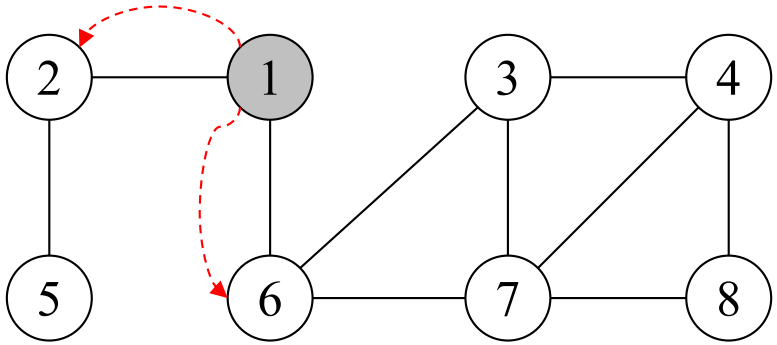
- Uso de uma fila para organizar os vértices que devem ser descobertos
  1. a fila começa com o vértice origem
  2. o primeiro vértice da fila é recuperado e processado, sendo que seus vértices adjacentes são inseridos no final da fila
  3. se a fila está vazia, o processo termina. Caso contrário, volta-se ao passo 2

Busca em Largura: Exemplo



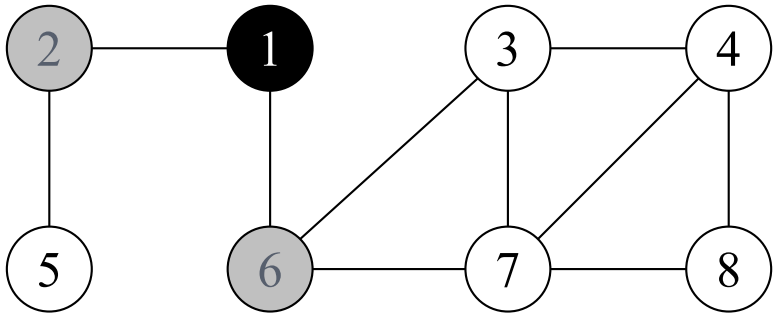
Vértice origem: 1
Distância k do vértice origem: 0
Ação: vértice 1 torna-se cinza

Busca em Largura: Exemplo



Vértices não descobertos adjacentes a 1: 2, 6
Distância k do vértice origem: 1

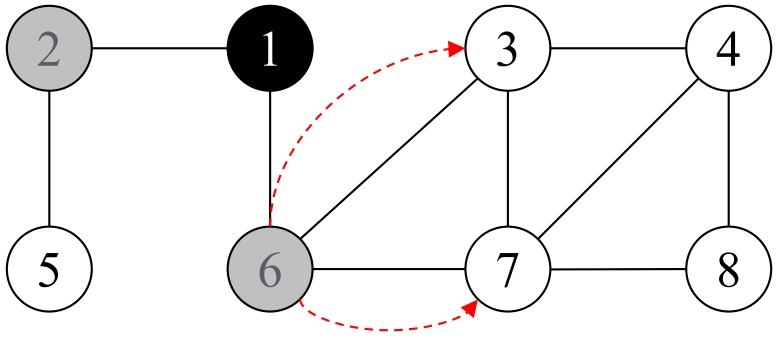
Busca em Largura: Exemplo

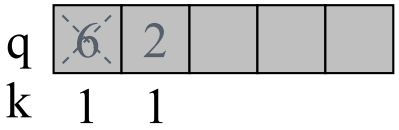


q	6	2			
k	1	1			

Vértices não descobertos adjacentes a 1: 2, 6
Distância k do vértice origem: 1
Ação: vértice 1 torna-se preto e vértices 2 e 6 tornam-se cinza

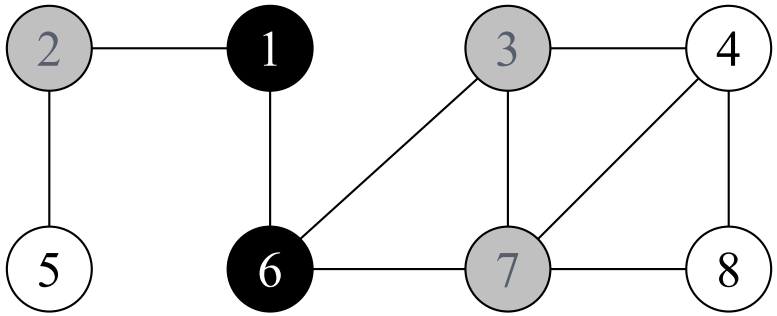
Busca em Largura: Exemplo





Vértices não descobertos adjacentes a 6: 3, 7
Distância k do vértice origem: 2

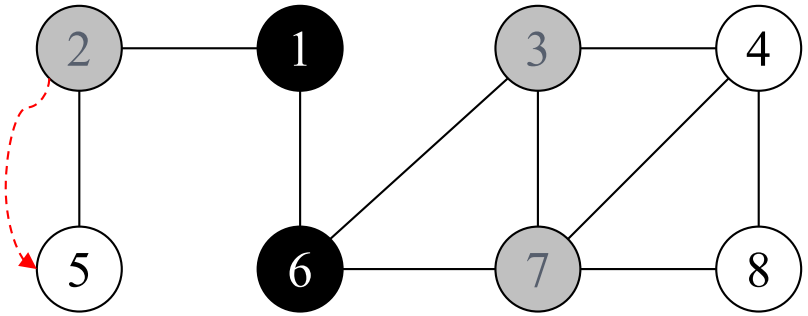
Busca em Largura: Exemplo



q	2	3	7		
k	1	2	2		

Vértices não descobertos adjacentes a 6: 3, 7
Distância k do vértice origem: 2
Ação: vértice 6 torna-se preto e vértices 3 e 7 tornam-se cinza

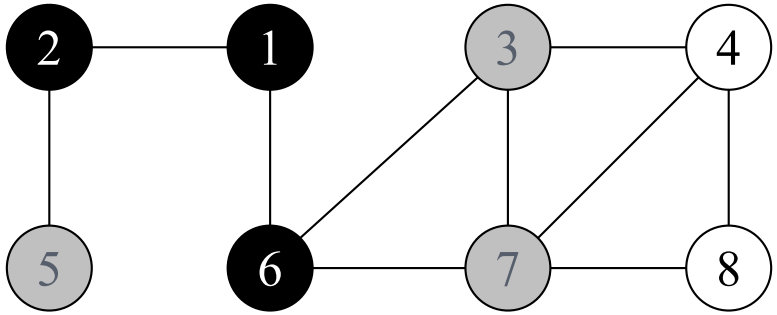
Busca em Largura: Exemplo



q	~~2~~	3	7		
k	1	2	2		

Vértices não descobertos adjacentes a 2: 5
Distância k do vértice origem: 2

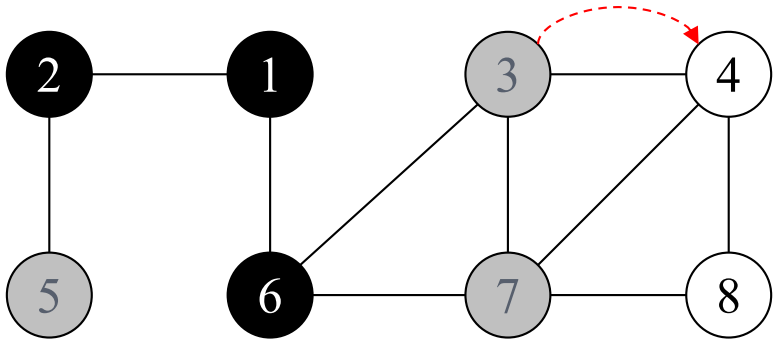
Busca em Largura: Exemplo

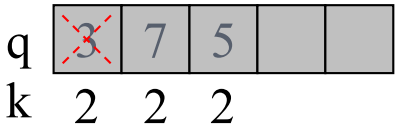


q	3	7	5		
k	2	2	2		

Vértices não descobertos adjacentes a 2: 5
Distância k do vértice origem: 2
Ação: vértice 2 torna-se preto e vértice 5 torna-se cinza

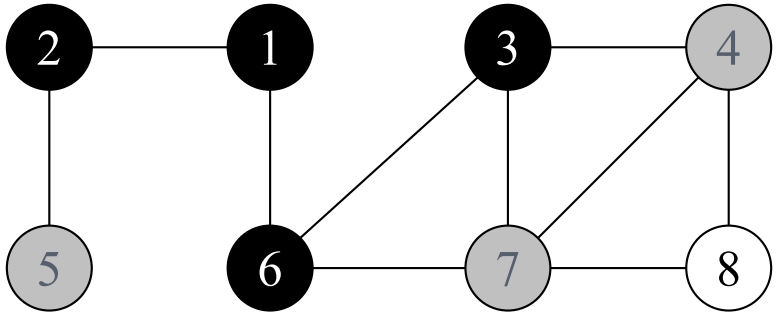
Busca em Largura: Exemplo





Vértices não descobertos adjacentes a 3: 4
Distância k do vértice origem: 3

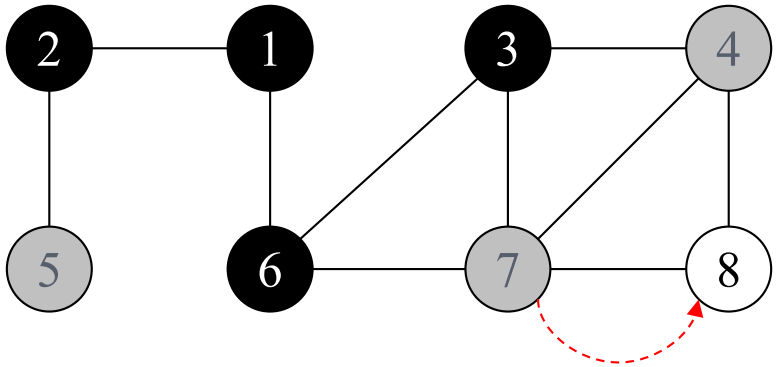
Busca em Largura: Exemplo



q	7	5	4		
k	2	2	3		

Vértices não descobertos adjacentes a 3: 4
Distância k do vértice origem: 3
Ação: vértice 3 torna-se preto e vértice 4 torna-se cinza

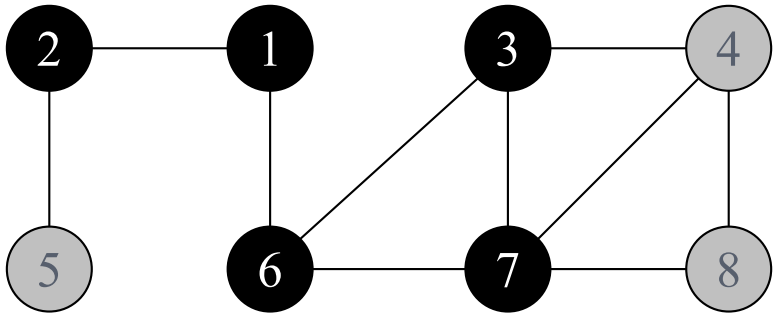
Busca em Largura: Exemplo



q	~~7~~	5	4		
k	2	2	3		

Vértices não descobertos adjacentes a 7: 8
Distância k do vértice origem: 3

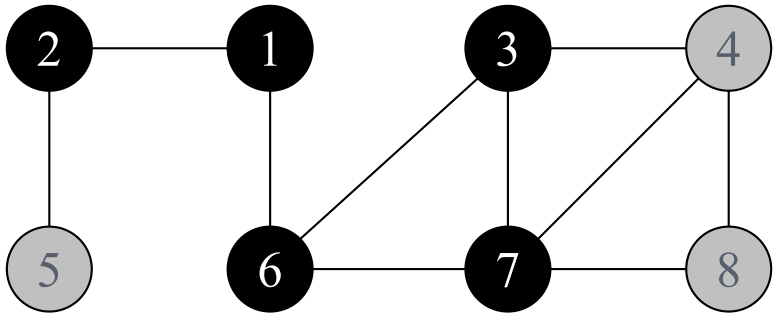
Busca em Largura: Exemplo



q	5	4	8		
k	2	3	3		

Vértices não descobertos adjacentes a 7: 8
Distância k do vértice origem: 3
Ação: vértice 7 torna-se preto e vértice 8 torna-se cinza

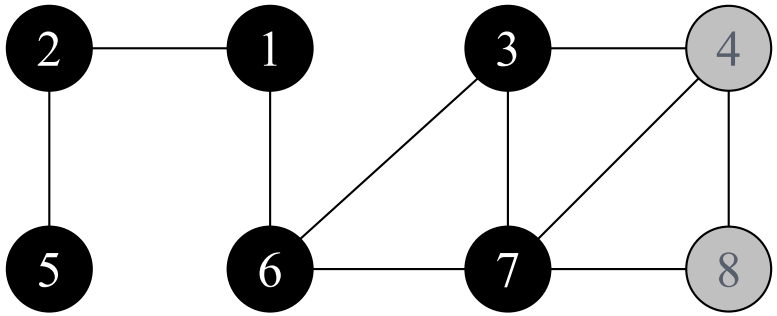
Busca em Largura: Exemplo

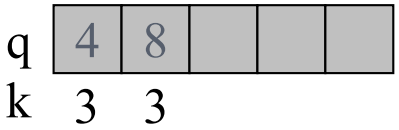


q	~~5~~	4	8		
k	2	3	3		

Vértices não descobertos adjacentes a 5: nenhum
Distância k do vértice origem: -

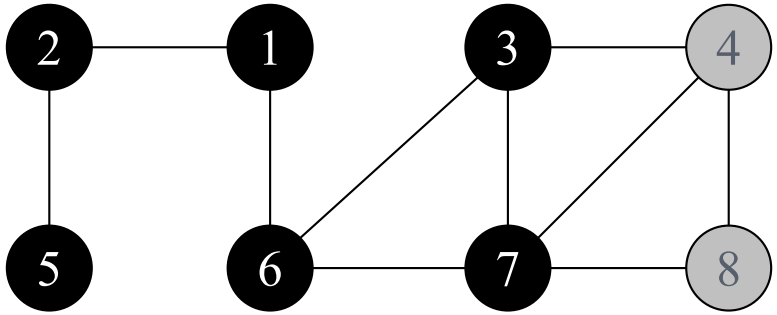
Busca em Largura: Exemplo

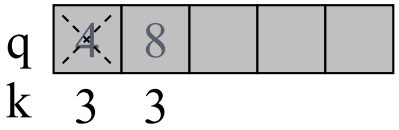




Vértices não descobertos adjacentes a 5: nenhum
Distância k do vértice origem: -
Ação: vértice 5 torna-se preto

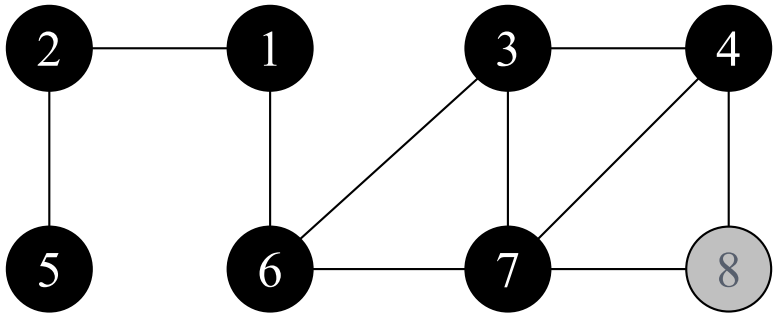
Busca em Largura: Exemplo





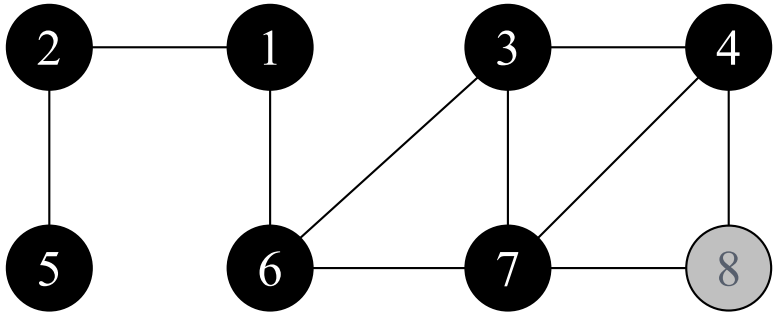
Vértices não descobertos adjacentes a 4: nenhum
Distância k do vértice origem: -

Busca em Largura: Exemplo



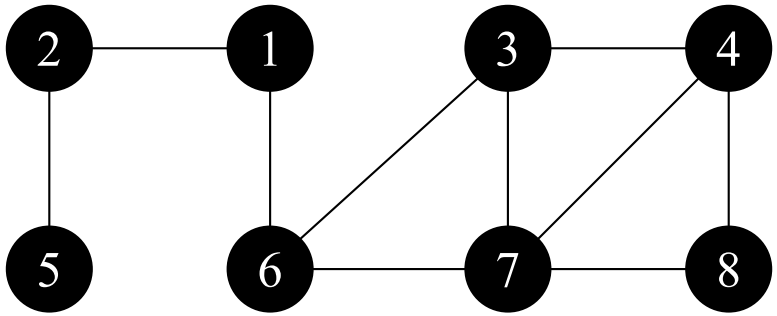
Vértices não descobertos adjacentes a 4: nenhum
Distância k do vértice origem: -
Ação: vértice 4 torna-se preto

Busca em Largura: Exemplo



Vértices não descobertos adjacentes a 8: nenhum
Distância k do vértice origem: -

Busca em Largura: Exemplo



Vértices não descobertos adjacentes a 8: nenhum
Distância k do vértice origem: -
Ação: vértice 8 torna-se preto

Busca em Largura: Complexidade

$$O(|V| + |A|)$$

- Característica
  - linear em relação ao tamanho da representação do grafo usando listas de adjacência
- $O(|V|)$
  - todos os vértices são colocados na fila no máximo uma vez, ou seja, são executadas $|V|$ iterações com custo $O(1)$ cada uma delas
- $O(|A|)$
  - cada lista de adjacência é percorrida no máximo uma vez quando o vértice é retirado da fila

Busca em Largura: Uso

- O algoritmo é base para outros algoritmos importantes:
  - encontrar a árvore geradora mínima (**MST**) – **Algoritmo de Prim**
  - encontrar o caminho mais curto de um vértice v a todos os outros – **Algoritmo de Dijkstra**

a busca em largura resulta no caminho mais curto entre o vértice origem u e um vértice qualquer v.

Busca em Profundidade: Definição

- *Depth-First Search – DFS*
- Características:
  - o algoritmo busca o vértice "mais profundo" no grafo sempre que possível
  - as arestas são exploradas a partir do vértice **v** mais recentemente descoberto e que ainda possui arestas não exploradas saindo dele
  - quando todas as arestas adjacentes a **v** tiverem sido exploradas, a busca "anda para trás"(*backtracking*) para explorar vértices que saem do vértice a partir do qual **v** foi descoberto

Busca em Profundidade: Estratégia

- Cada vértice é colorido de branco, cinza ou preto
  - todos os vértices são inicialmente brancos
  - quando um vértice **v** é "descoberto" pela primeira vez ele torna-se cinza e recebe um marcador de tempo de descoberta
  - quando todos os vértices adjacentes a **v** forem completamente "descobertos", **v** torna-se preto e recebe um marcador de tempo de término

Busca em Profundidade: Pilha

- Uso de uma pilha para organizar os vértices que devem ser descobertos
  - a cada escolha de caminho a ser percorrido, empilha-se o vértice original e segue-se o caminho
  - cada vez que o caminho acaba, retorna-se ao vértice anterior empilhado

pilha pode ser implementada de forma implícita (via recursão) ou explícita

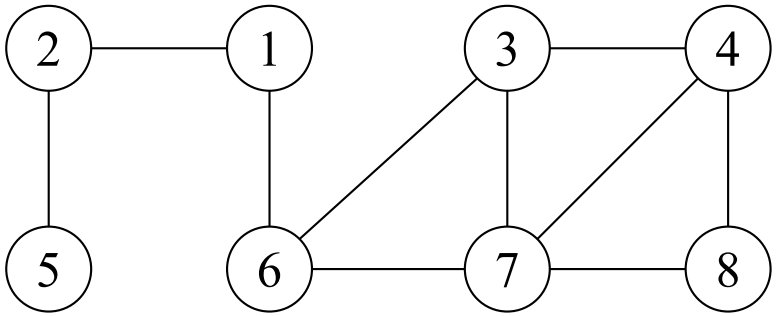
Busca em Profundidade: Execução

- Execução do algoritmo
  - gera uma árvore de busca em profundidade
- Classificação das arestas do grafo
  - arestas de árvore: arestas que ocorrem na árvore de busca em profundidade
  - arestas de retorno: arestas que ligam um nó a um antecessor na árvore
  - arestas de avanço: arestas que ligam um nó a um descendente na árvore
  - arestas de cruzamento: demais arestas

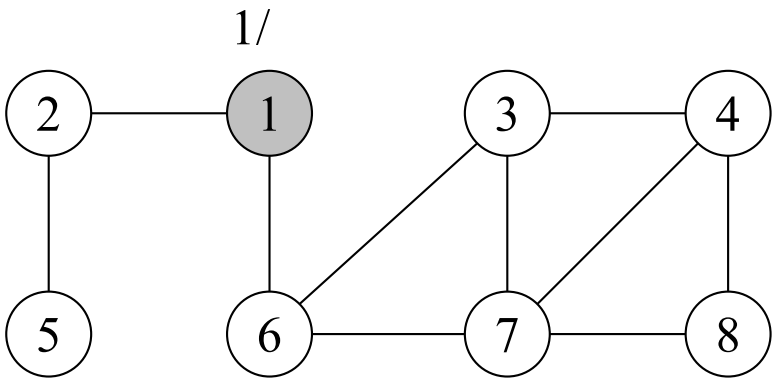
Busca em Profundidade: Execução

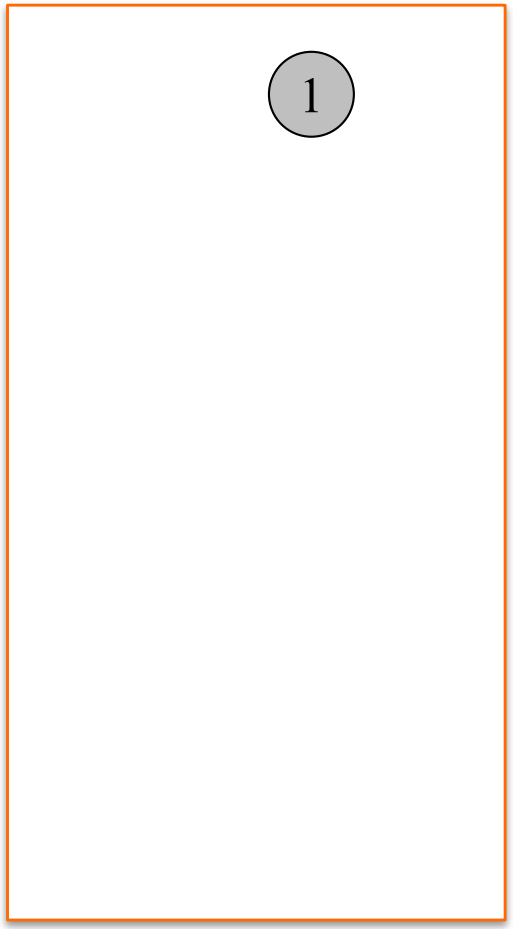
- Cada aresta (u,v)
  - classificada pela cor do vértice v alcançado quando a aresta é percorrida pela primeira vez
- Classificação das arestas do grafo
  - arestas de árvore: cor de v = branco
  - arestas de retorno: cor de v = cinza
  - arestas de avanço: cor de v = preto e tempoDescoberta(u) < tempoDescoberta(v)
  - arestas de cruzamento: cor de v = preto e tempoDescoberta(u) > tempoDescoberta(v)

Busca em Profundidade: Exemplo 1



Busca em Profundidade: Exemplo 1

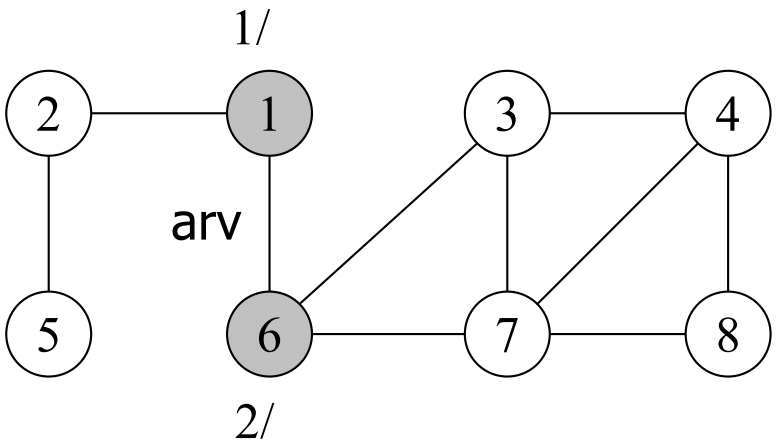


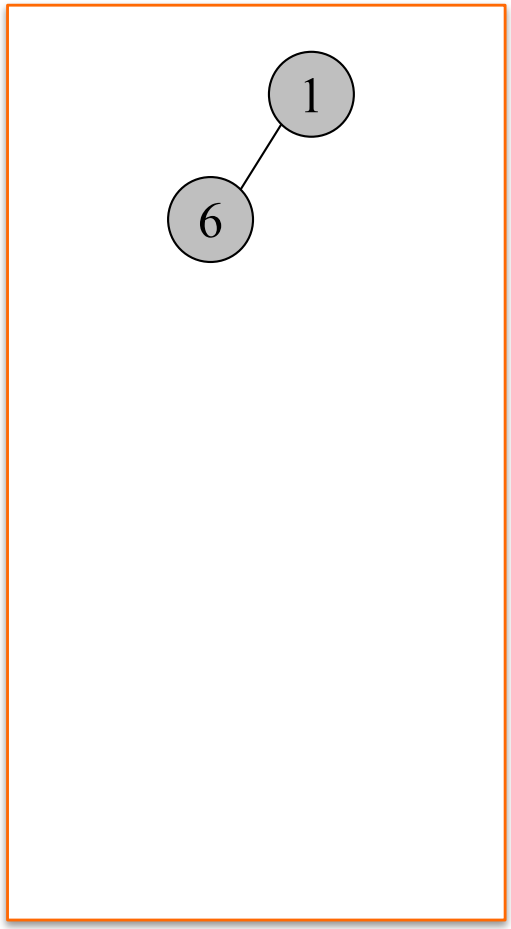


árvore de busca
em profundidade

Vértice origem: 1
Tempo de descoberta: 1
Ação: vértice 1 torna-se cinza
Tempo de término: -

Busca em Profundidade: Exemplo 1

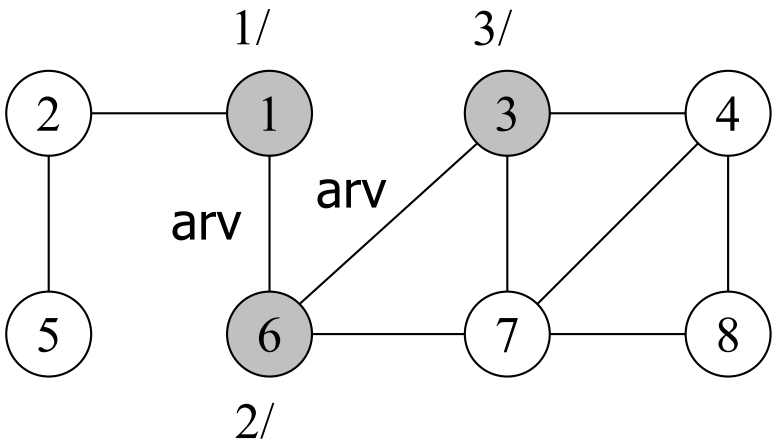


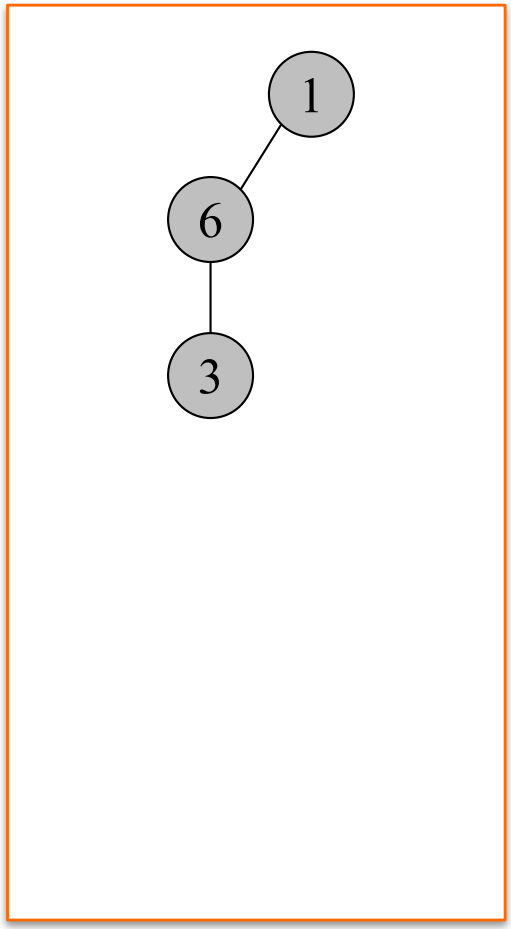


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 1: 6
Tempo de descoberta: 2
Ação: vértice 6 torna-se cinza
Tempo de término: -

BUSCA EM PROFUNDIDADE: EXEMPLO 1

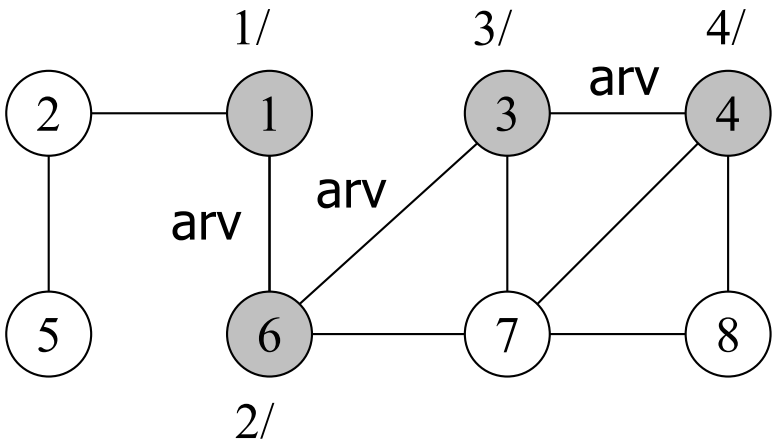


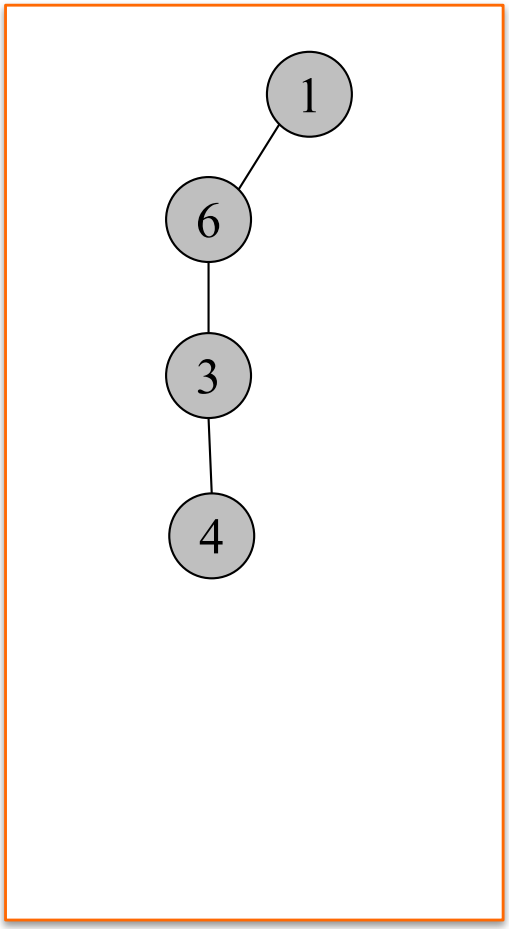


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 6: 3
Tempo de descoberta: 3
Ação: vértice 3 torna-se cinza
Tempo de término: -

Busca em Profundidade: Exemplo 1

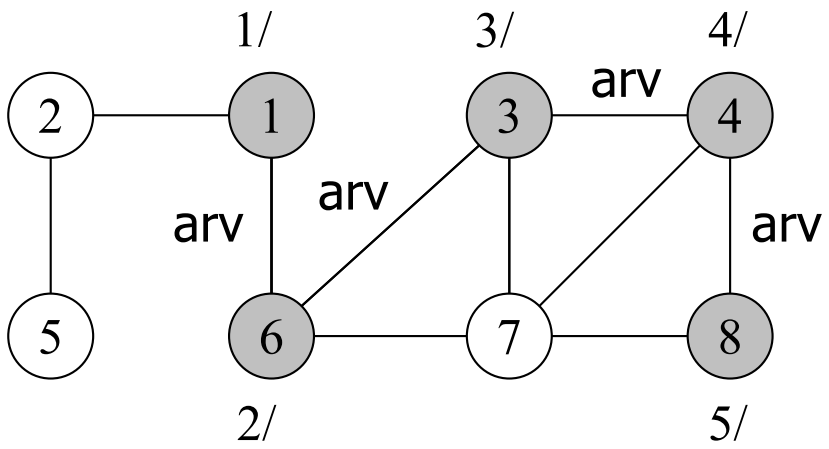


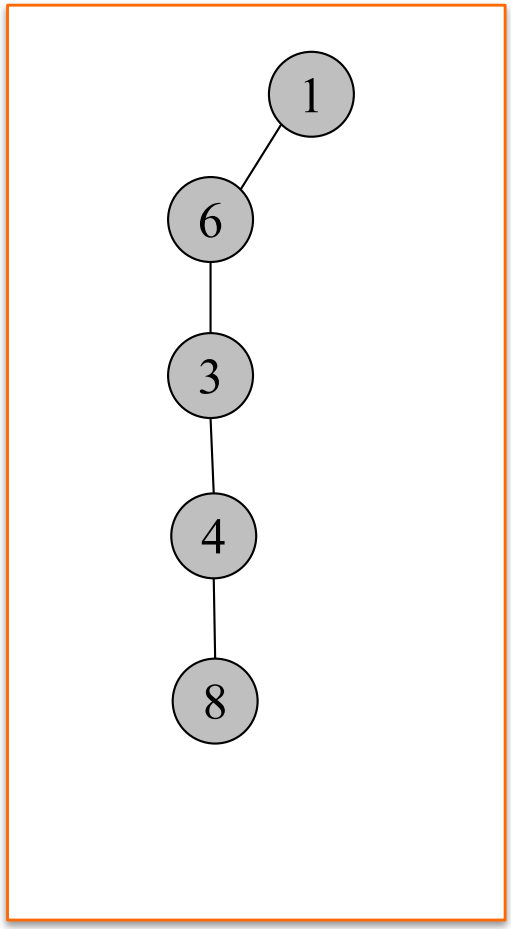


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 3: 4
Tempo de descoberta: 4
Ação: vértice 4 torna-se cinza
Tempo de término: -

BUSCA EM PROFUNDIDADE: EXEMPLO 1

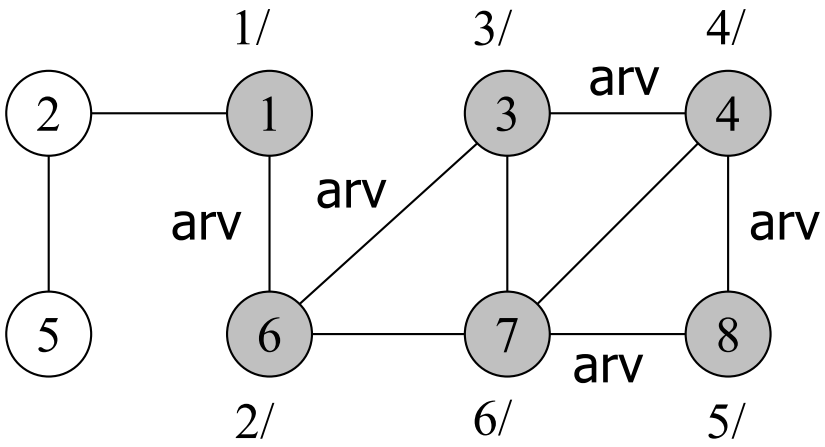


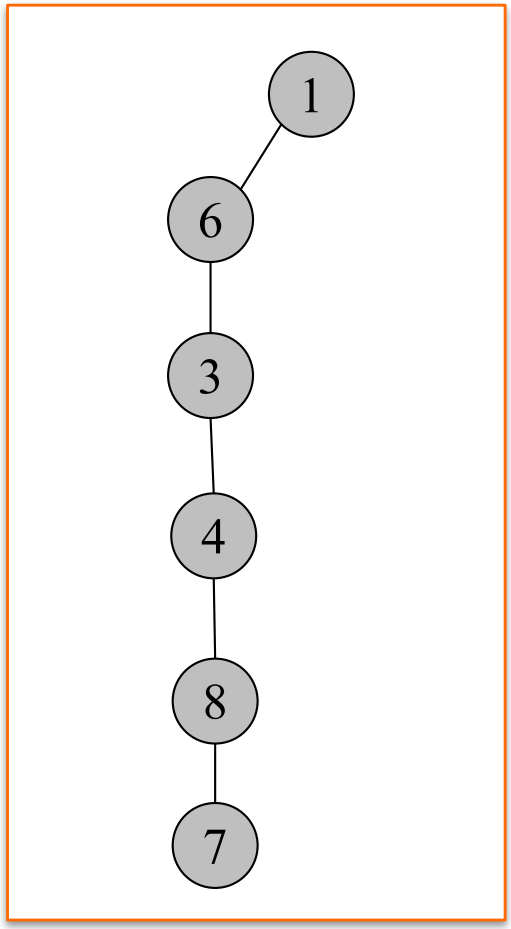


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 4: 8
Tempo de descoberta: 5
Ação: vértice 8 torna-se cinza
Tempo de término: -

Busca em Profundidade: Exemplo 1

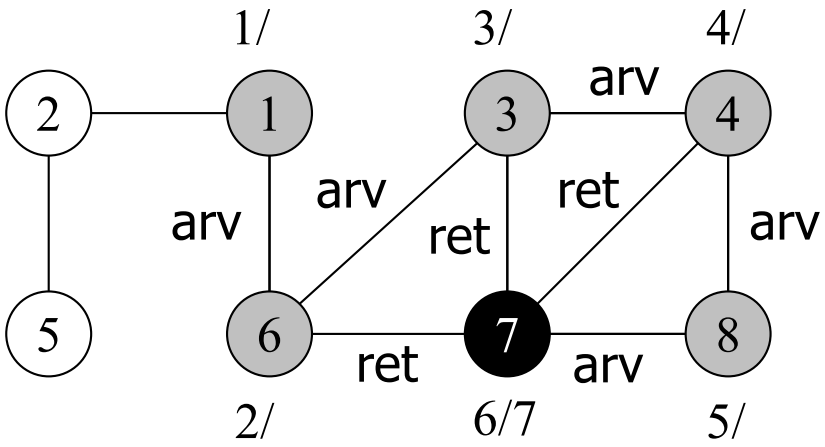


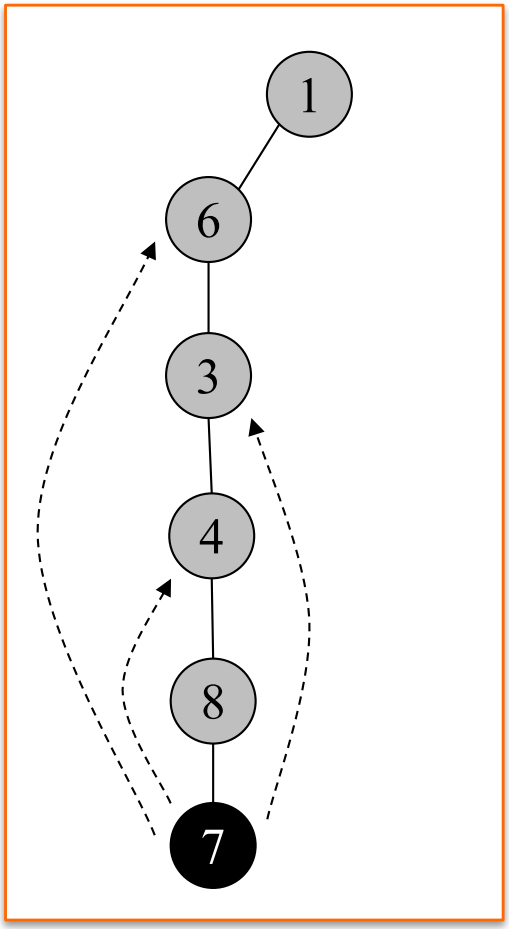


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 8: 7
Tempo de descoberta: 6
Ação: vértice 7 torna-se cinza
Tempo de término: -

Busca em Profundidade: Exemplo 1

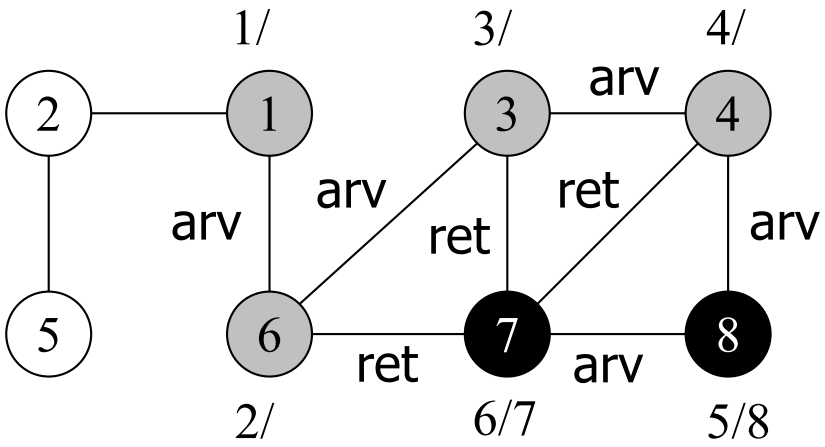


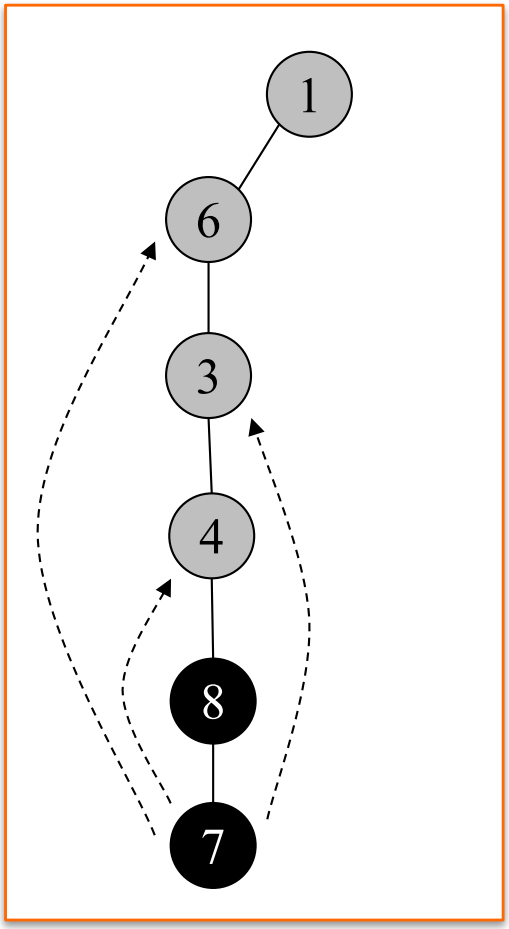


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 7: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 7 torna-se preto
Tempo de término: 7

Busca em Profundidade: Exemplo 1

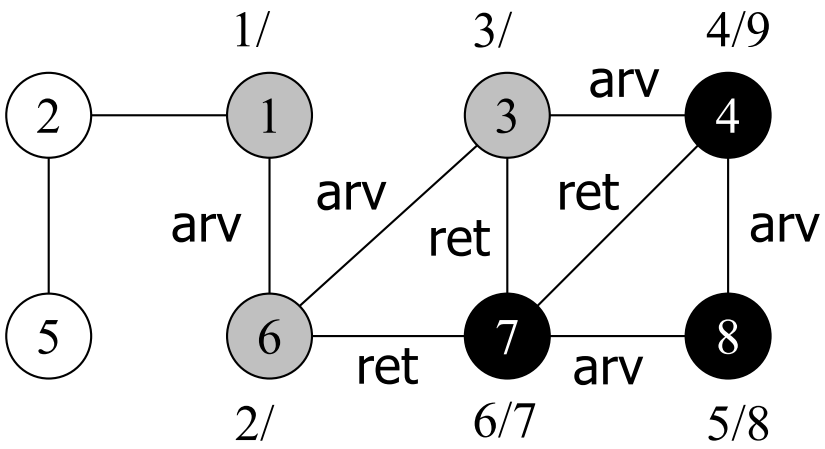


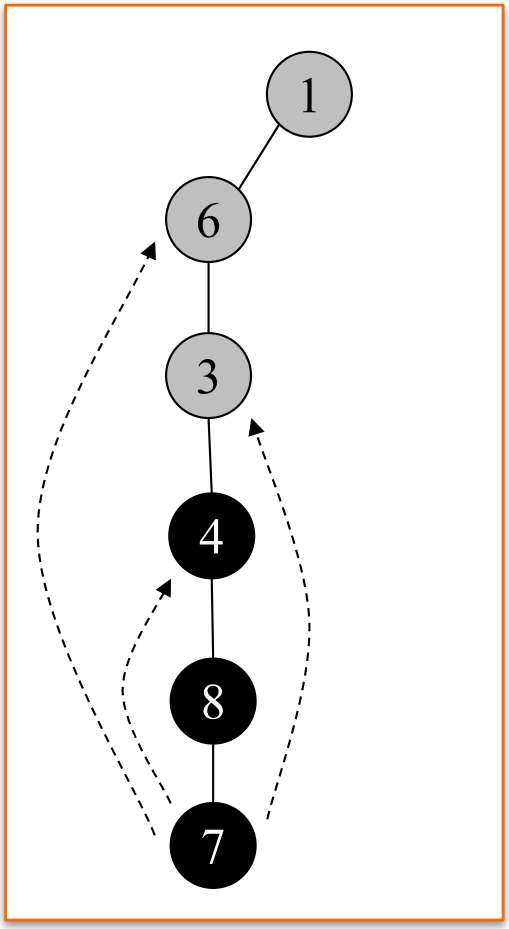


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 8: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 8 torna-se preto
Tempo de término: 8

Busca em Profundidade: Exemplo 1

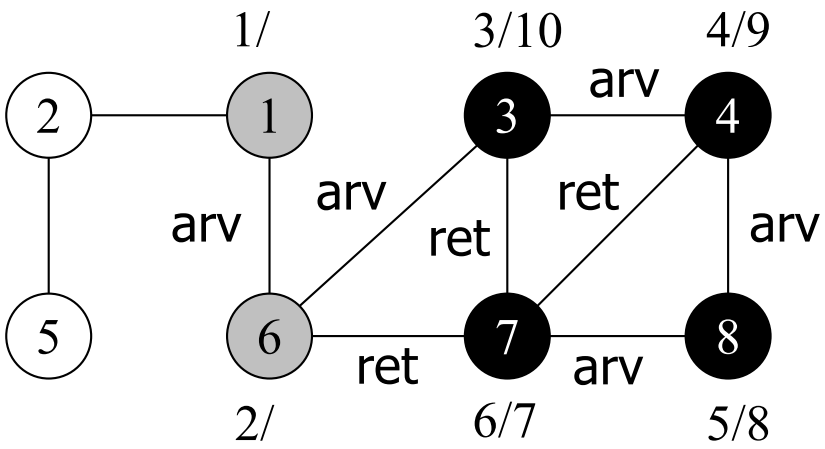


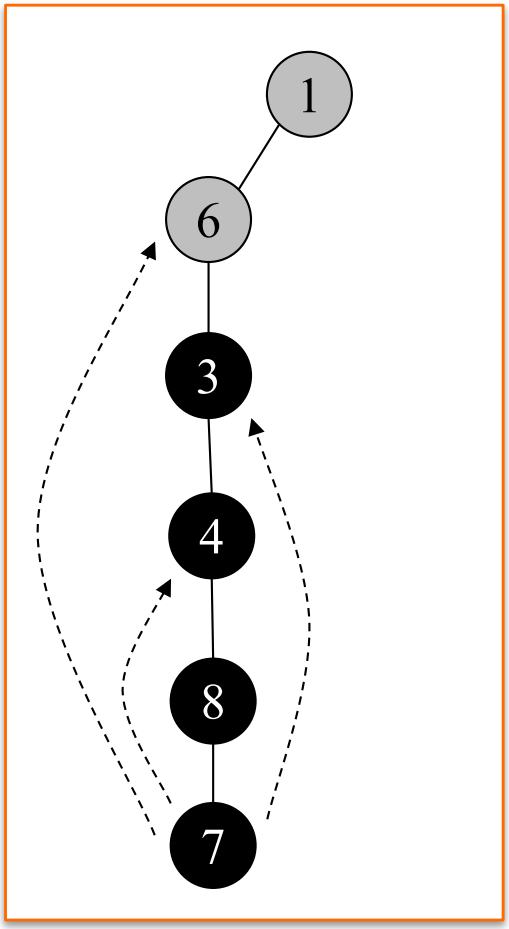


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 4: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 4 torna-se preto
Tempo de término: 9

Busca em Profundidade: Exemplo 1

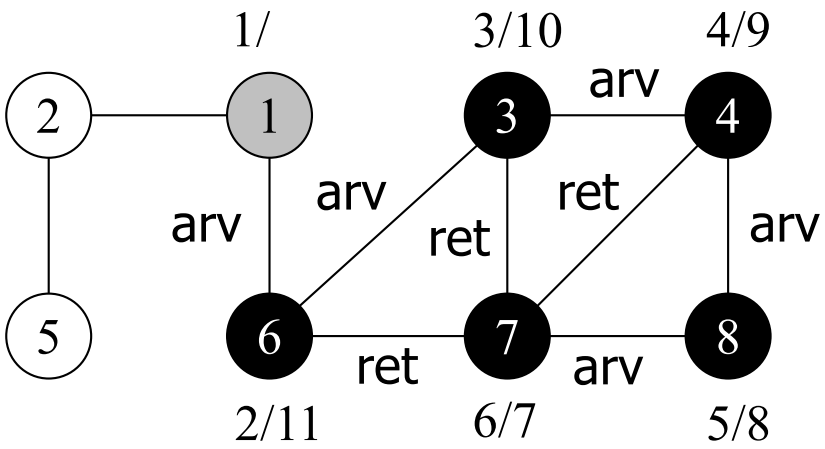


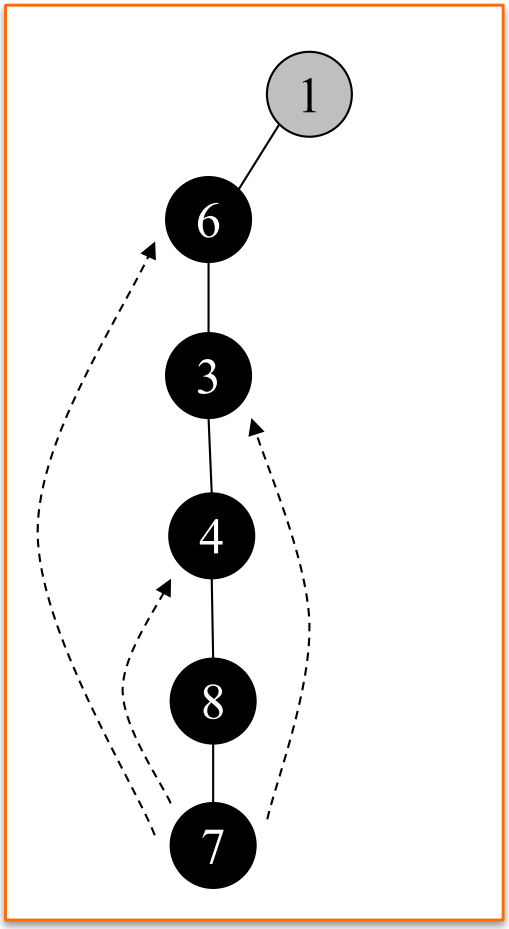


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 3: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 3 torna-se preto
Tempo de término: 10

Busca em Profundidade: Exemplo 1

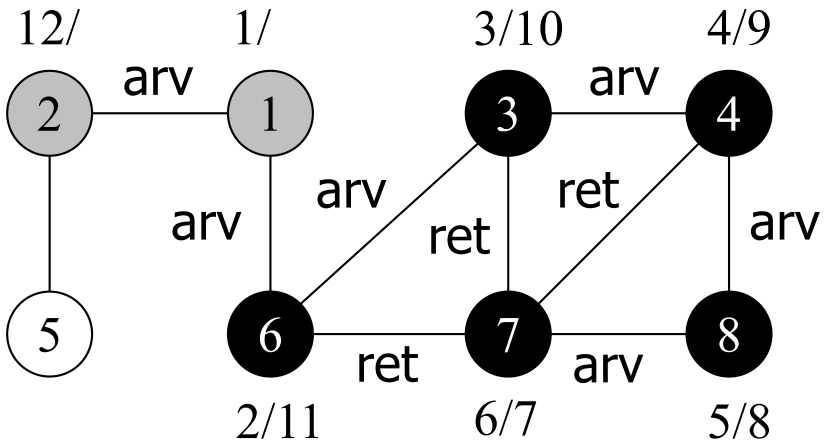


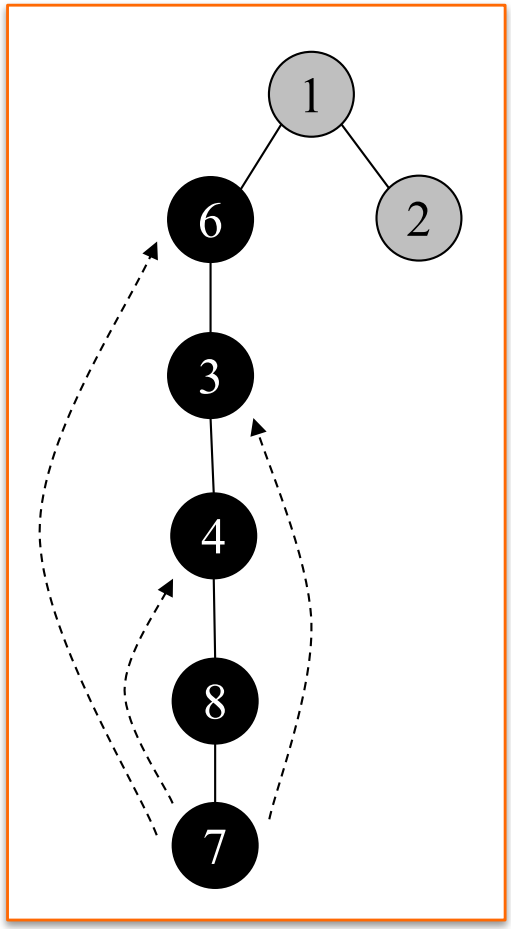


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 6: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 6 torna-se preto
Tempo de término: 11

Busca em Profundidade: Exemplo 1

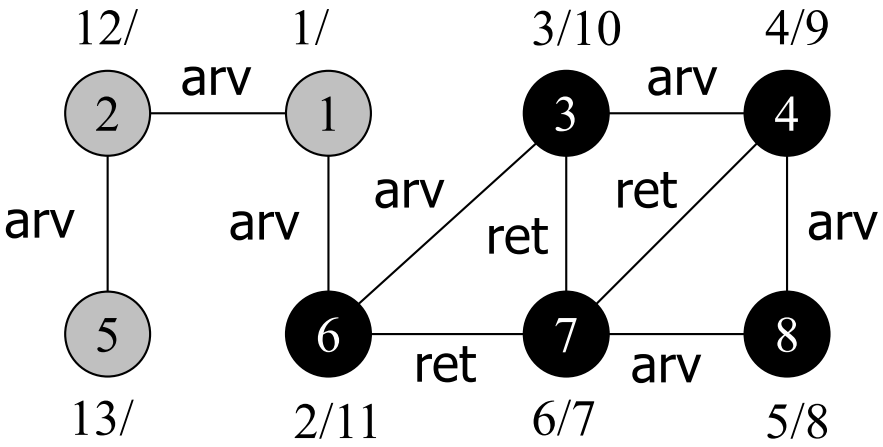


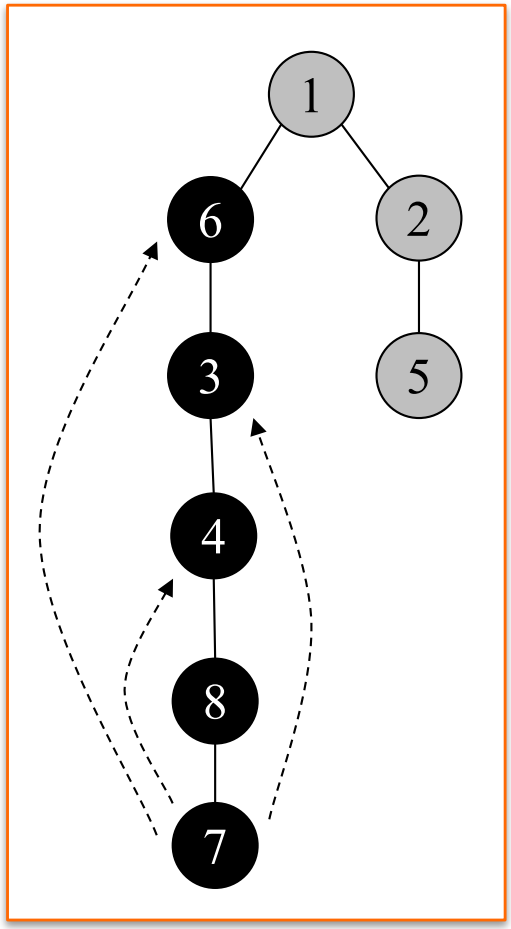


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 1: 2
Tempo de descoberta: 12
Ação: vértice 2 torna-se cinza
Tempo de término: -

Busca em Profundidade: Exemplo 1

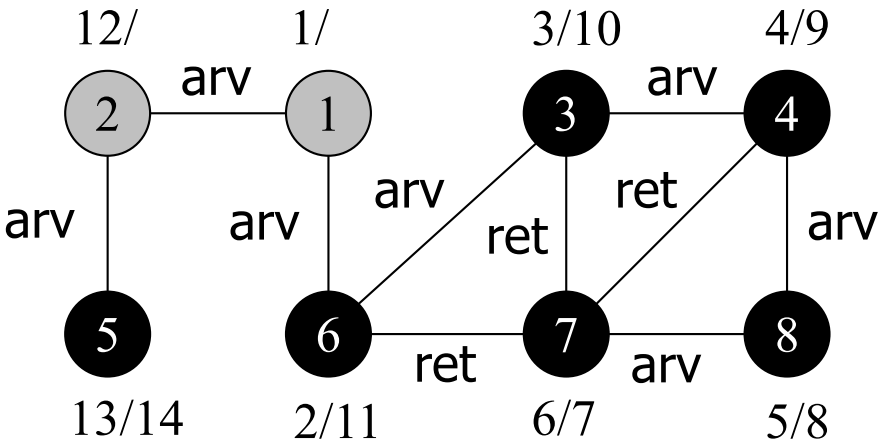


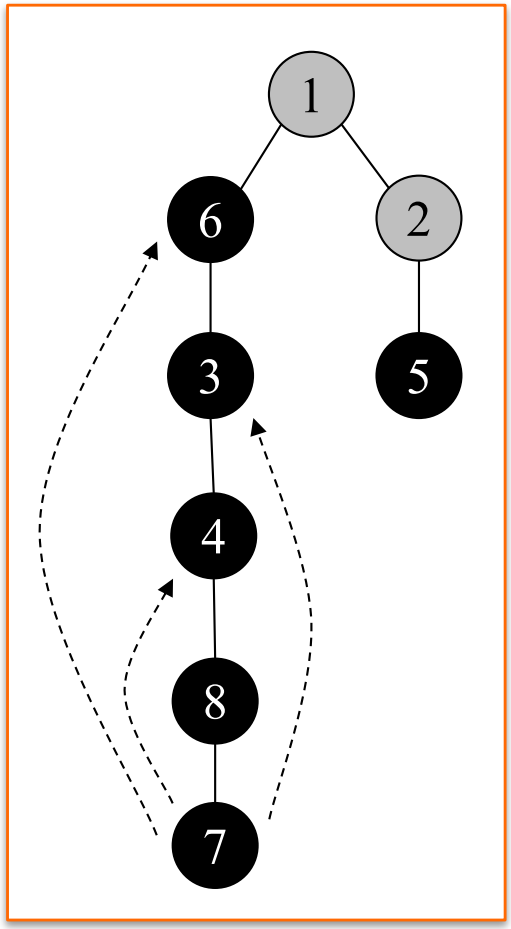


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 2: 5
Tempo de descoberta: 13
Ação: vértice 5 torna-se cinza
Tempo de término: -

Busca em Profundidade: Exemplo 1

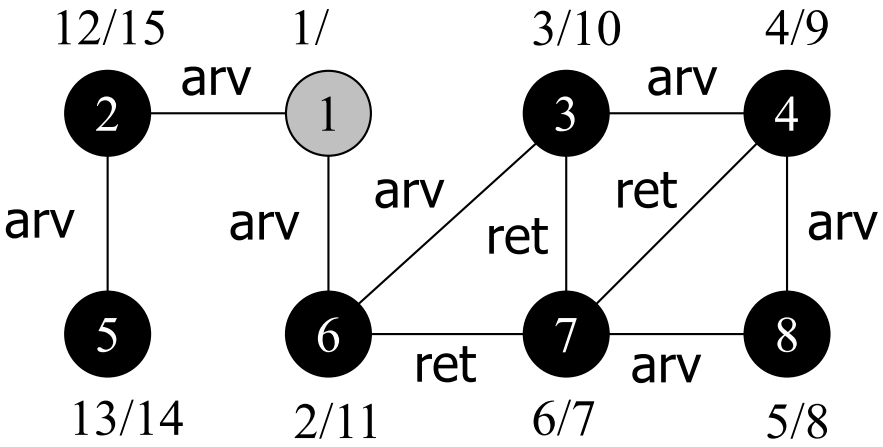


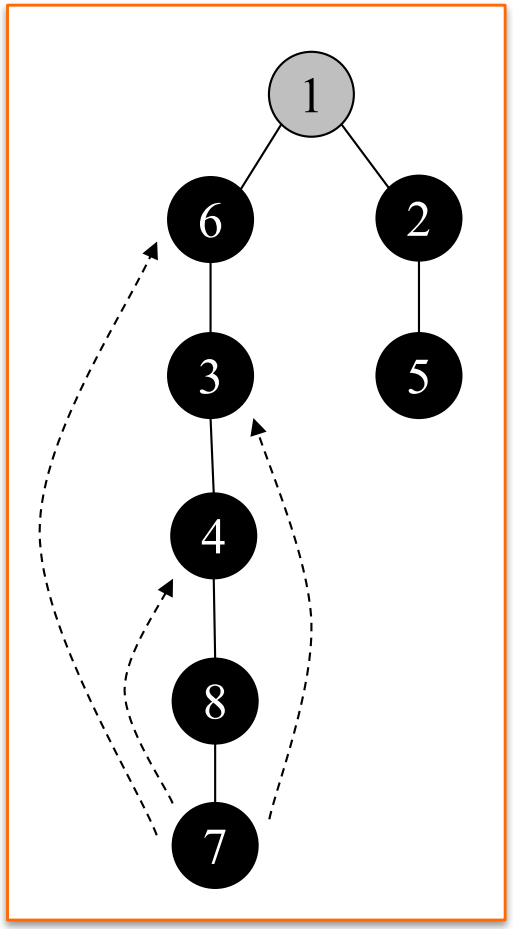


árvore de busca em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 5: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 5 torna-se preto
Tempo de término: 14

Busca em Profundidade: Exemplo 1

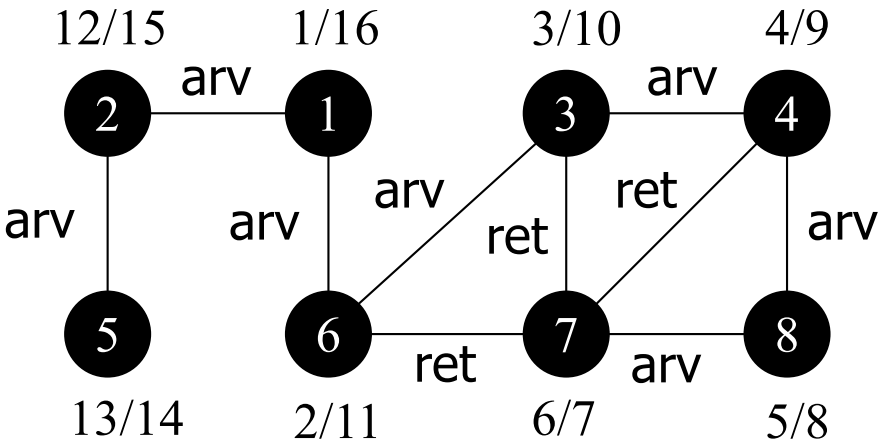


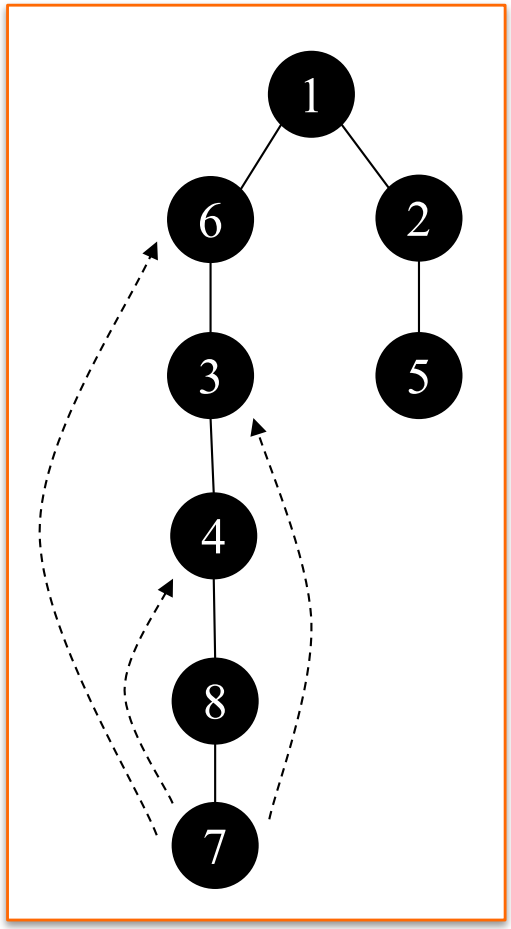


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 2: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 2 torna-se preto
Tempo de término: 15

Busca em Profundidade: Exemplo 1

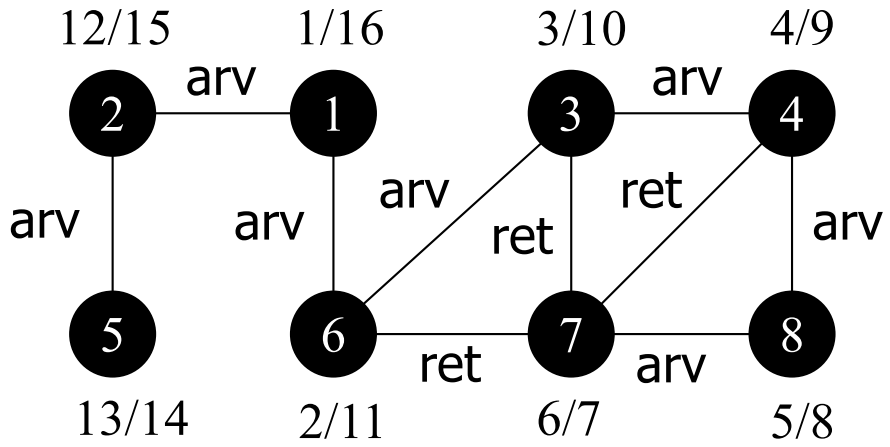




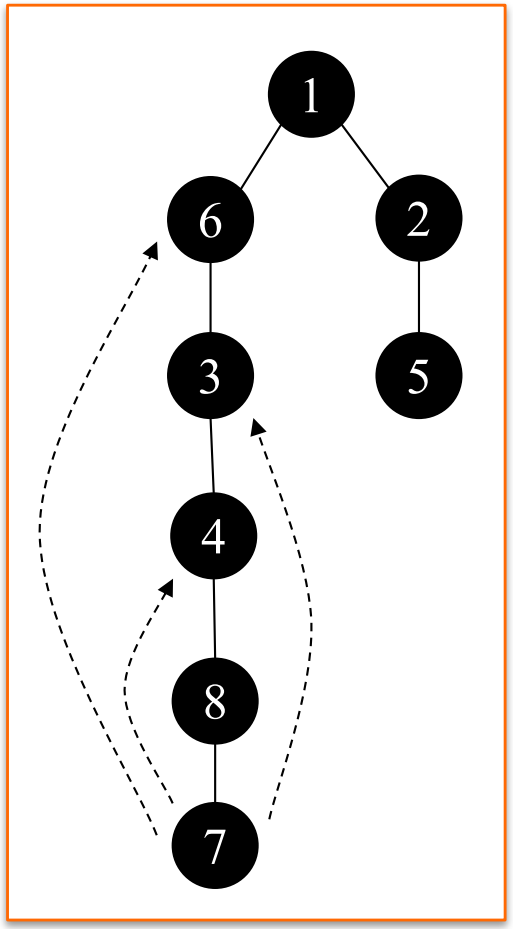
árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 1: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 1 torna-se preto
Tempo de término: 16

Busca em Profundidade: Exemplo 1

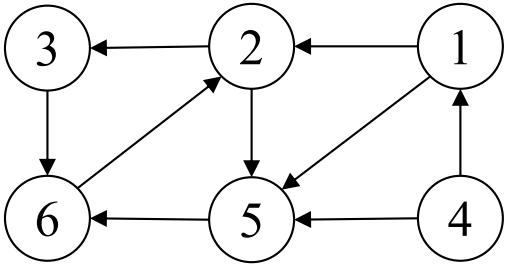


em um grafo não direcionado, todas as arestas são de árvore ou de retorno

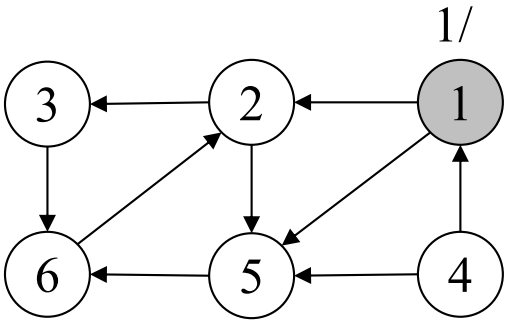


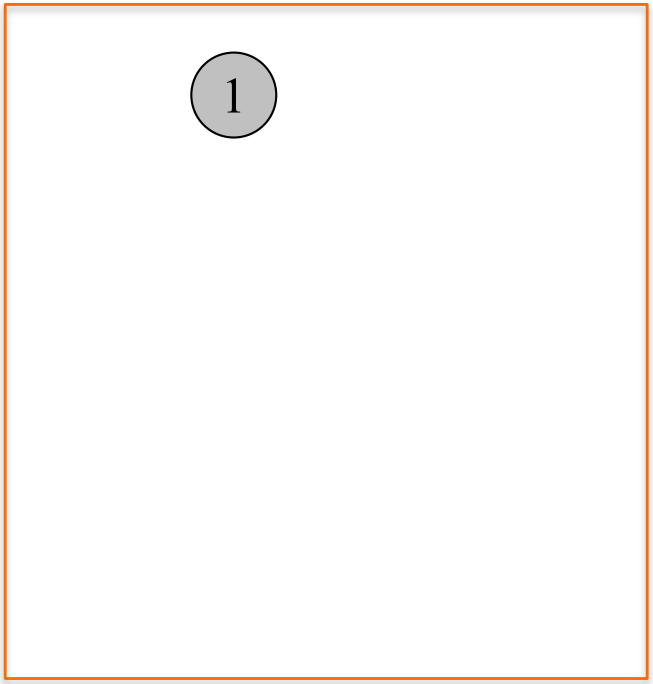
árvore de busca em profundidade

Busca em Profundidade: Exemplo 2



BUSCA EM PROFUNDIDADE: EXEMPLO 2

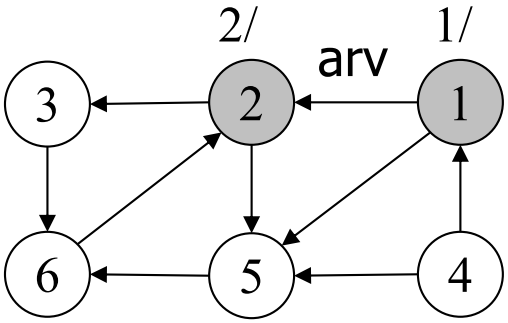


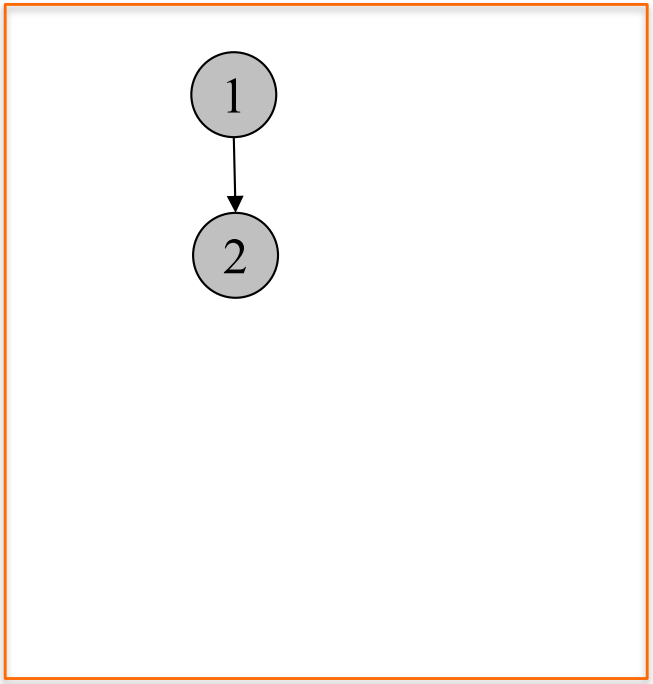


árvore de busca
em profundidade

Vértice origem: 1
Tempo de descoberta: 1
Ação: vértice 1 torna-se cinza
Tempo de término: -

BUSCA EM PROFUNDIDADE: EXEMPLO 2

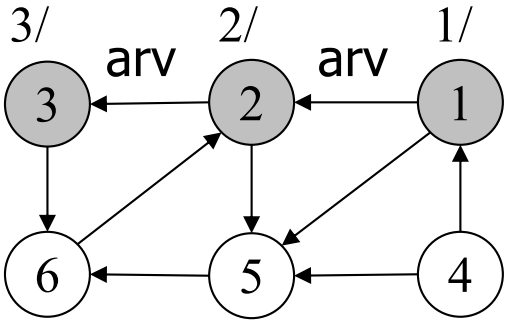


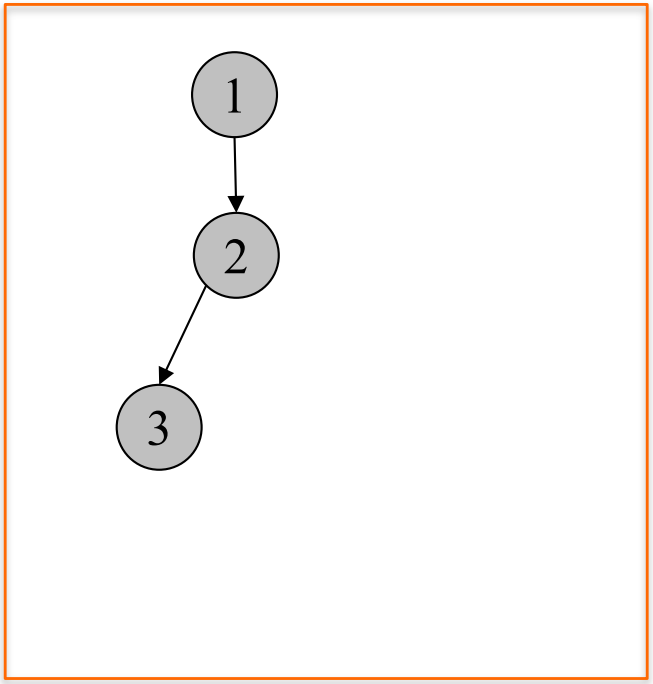


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 1: 2
Tempo de descoberta: 2
Ação: vértice 2 torna-se cinza
Tempo de término:

Busca em Profundidade: Exemplo 2

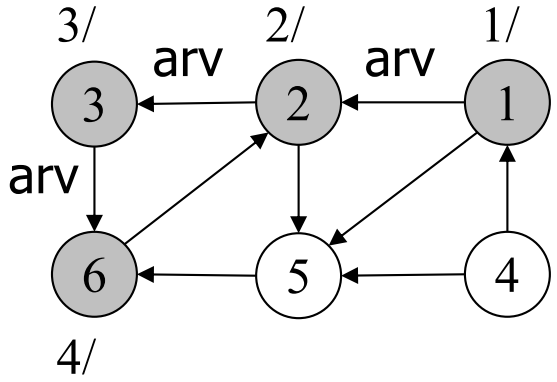


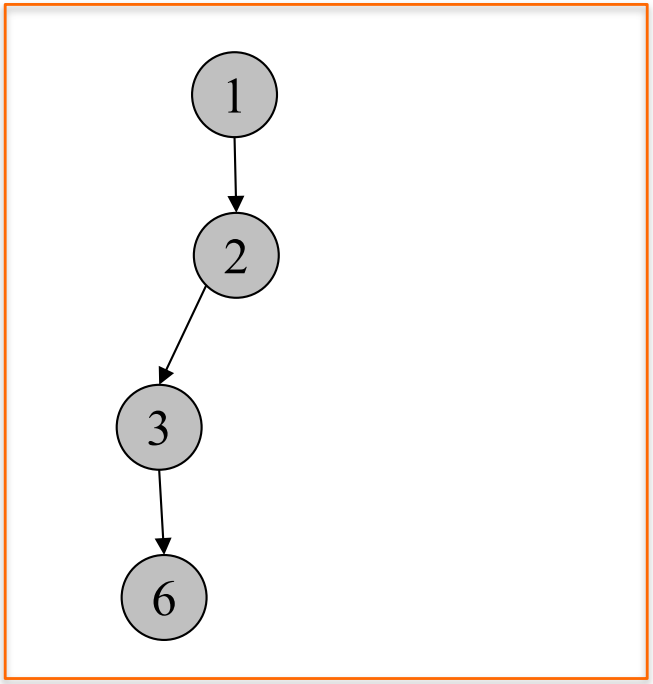


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 2: 3
Tempo de descoberta: 3
Ação: vértice 3 torna-se cinza
Tempo de término:

BUSCA EM PROFUNDIDADE: EXEMPLO 2

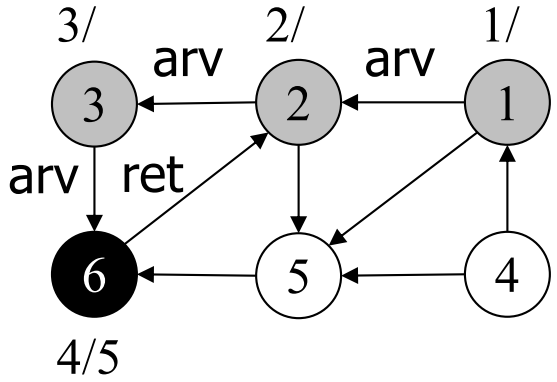


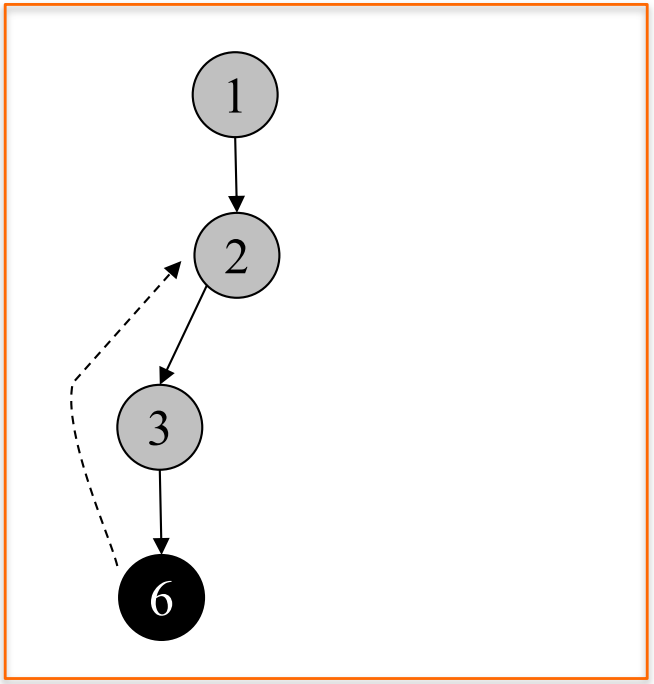


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 3: 6
Tempo de descoberta: 4
Ação: vértice 6 torna-se cinza
Tempo de término:

BUSCA EM PROFUNDIDADE: EXEMPLO 2

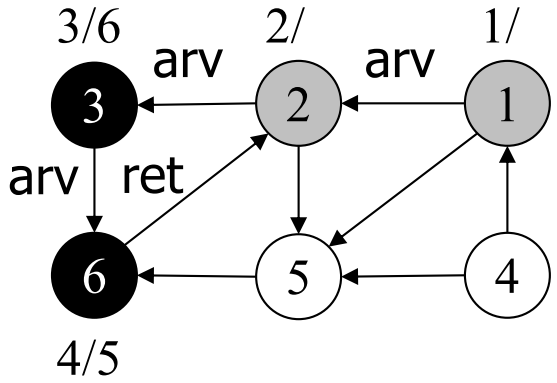


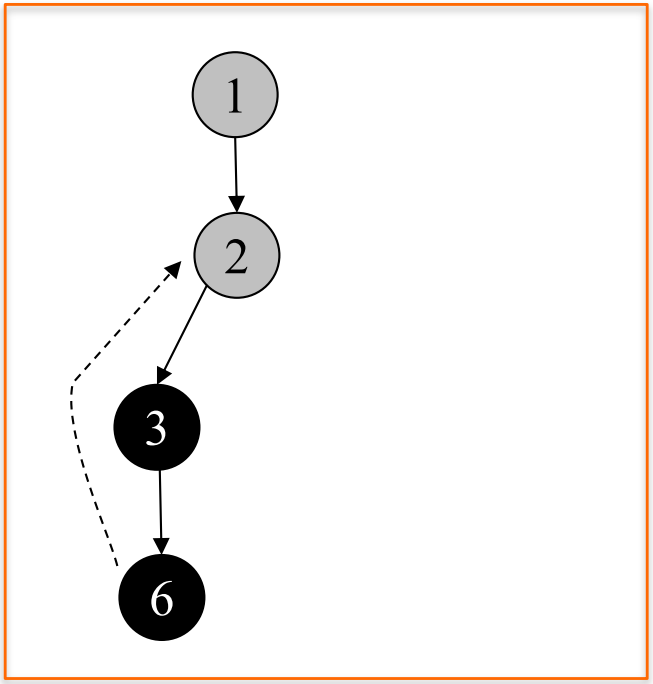


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 6: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 6 torna-se preto
Tempo de término: 5

BUSCA EM PROFUNDIDADE: EXEMPLO 2

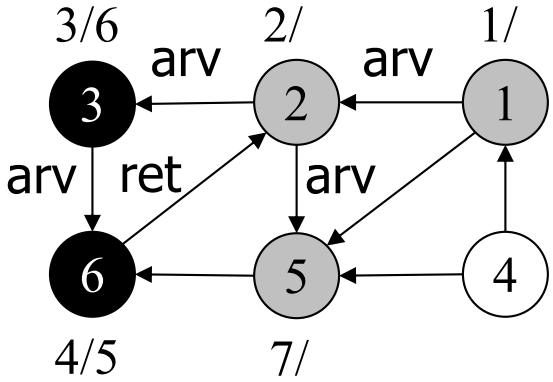


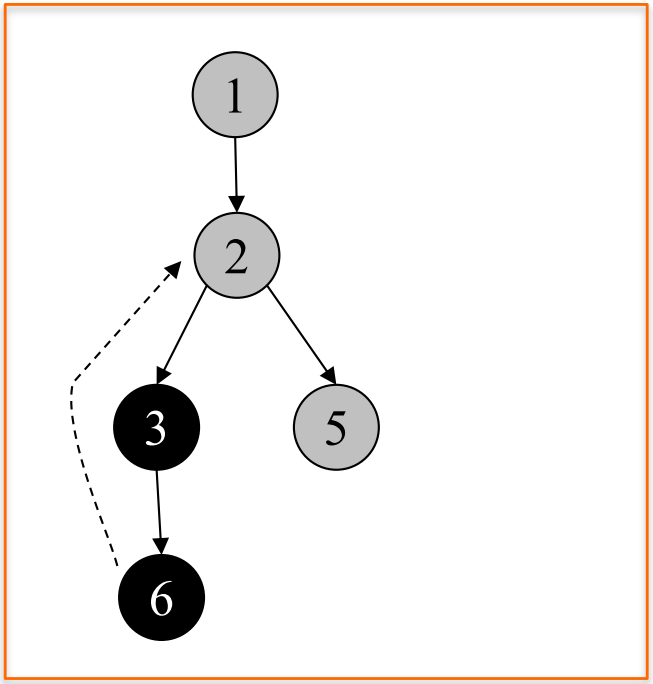


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 3: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 3 torna-se preto
Tempo de término: 6

Busca em Profundidade: Exemplo 2

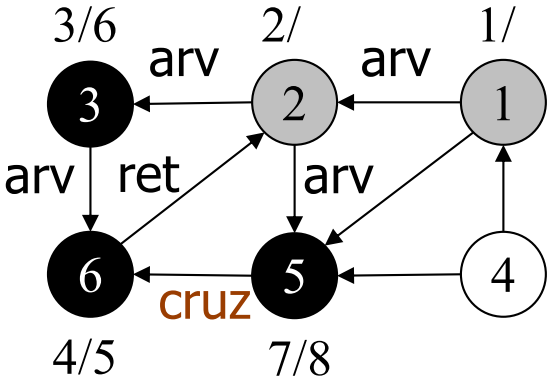


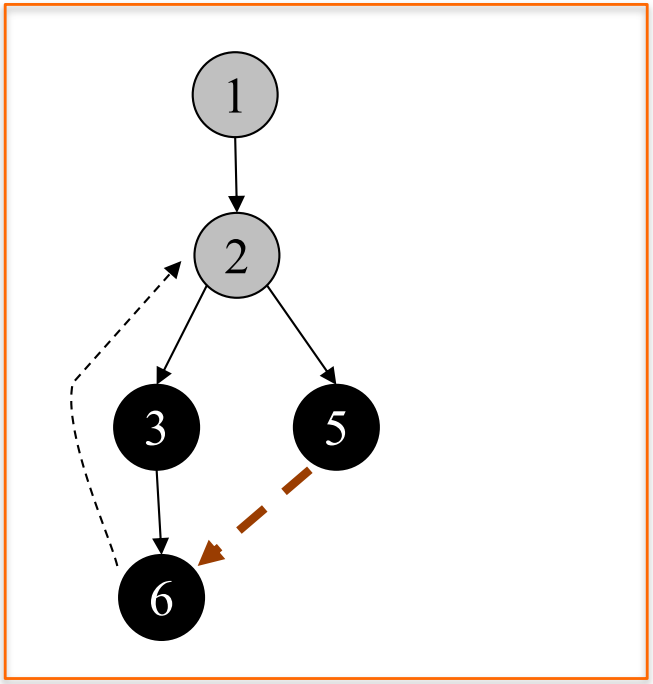


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 2: 5
Tempo de descoberta: 7
Ação: vértice 5 torna-se preto
Tempo de término: -

Busca em Profundidade: Exemplo 2

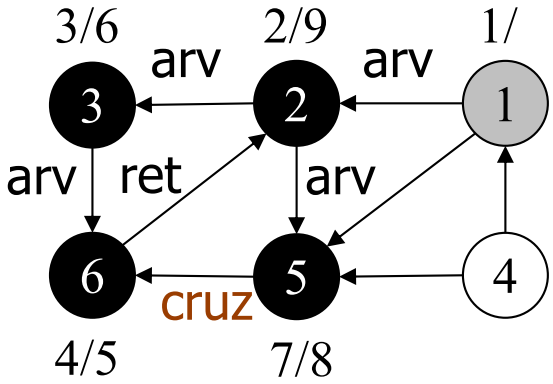


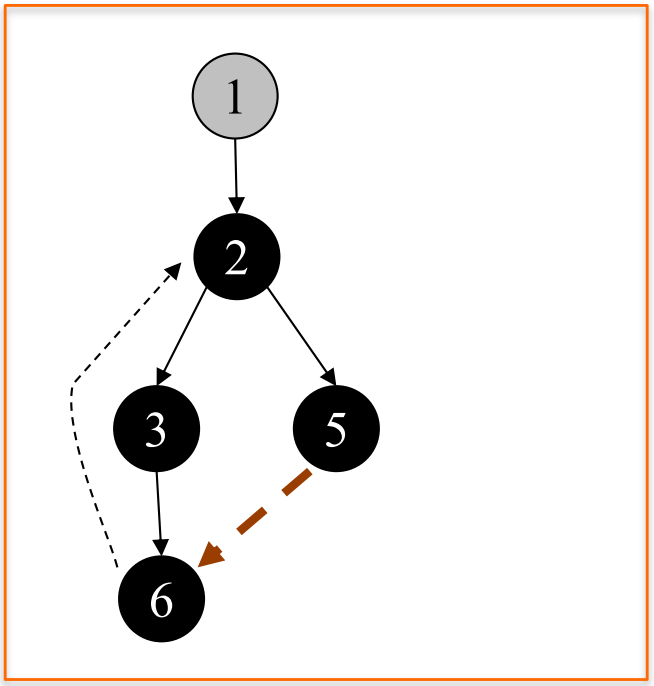


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 5: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 5 torna-se preto
Tempo de término: 8

BUSCA EM PROFUNDIDADE: EXEMPLO 2

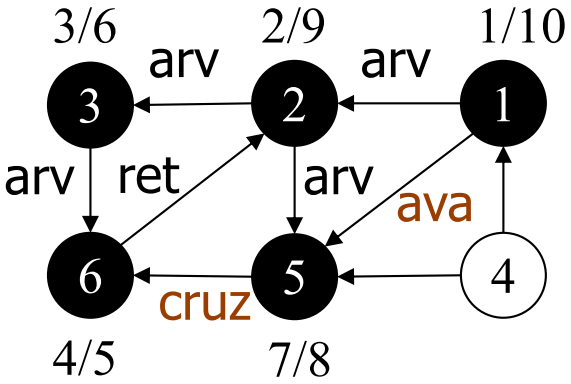


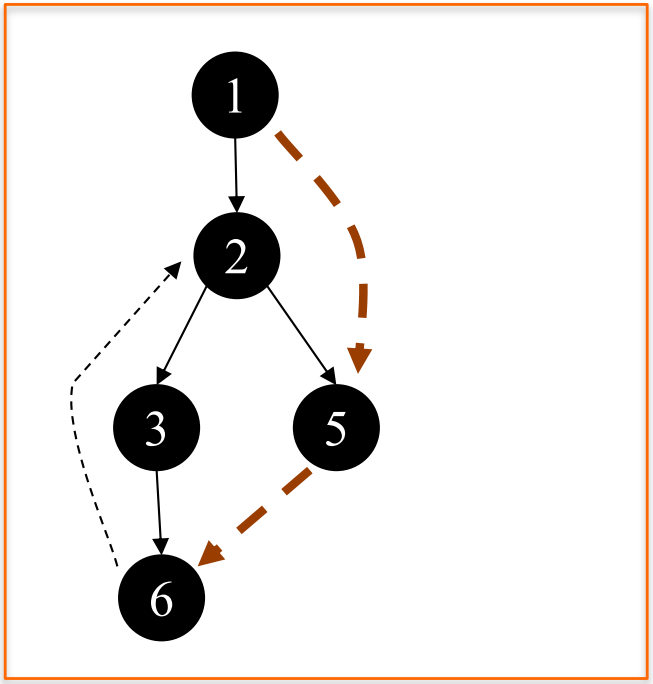


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 2: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 2 torna-se preto
Tempo de término: 9

BUSCA EM PROFUNDIDADE: EXEMPLO 2

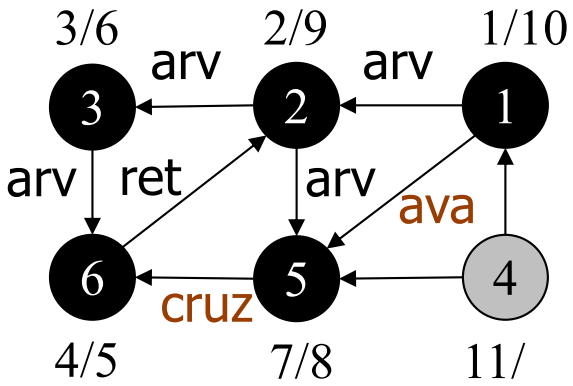


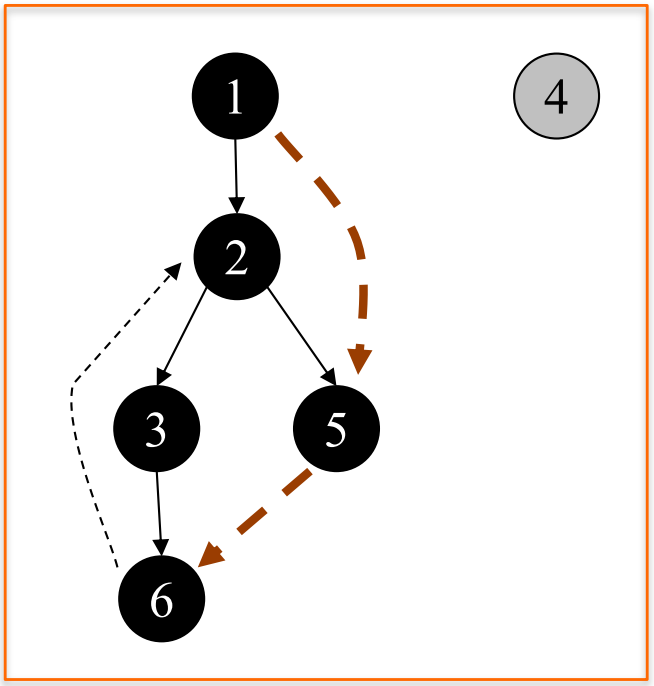


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 1: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 1 torna-se preto
Tempo de término: 10

Busca em Profundidade: Exemplo 2

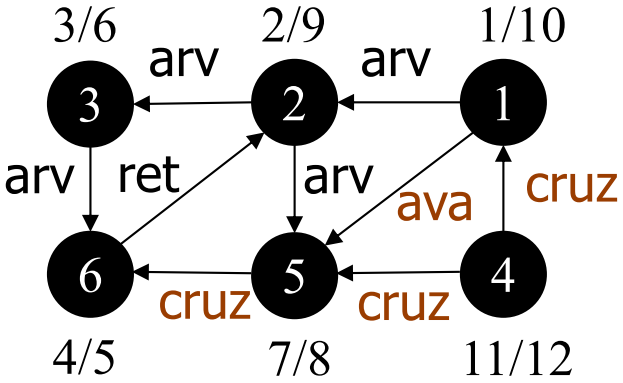


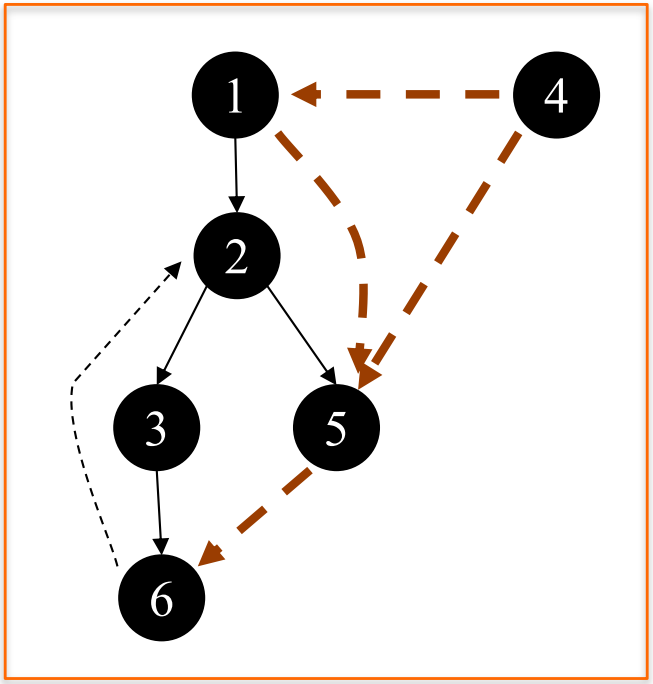


árvore de busca
em profundidade

Vértice origem: 4
Tempo de descoberta: 11
Ação: vértice 4 torna-se cinza
Tempo de término: -

Busca em Profundidade: Exemplo 2

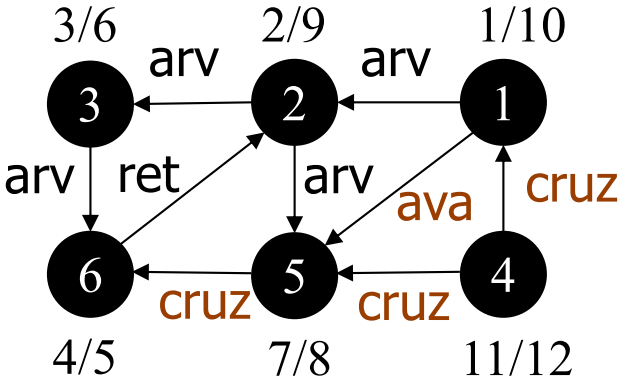


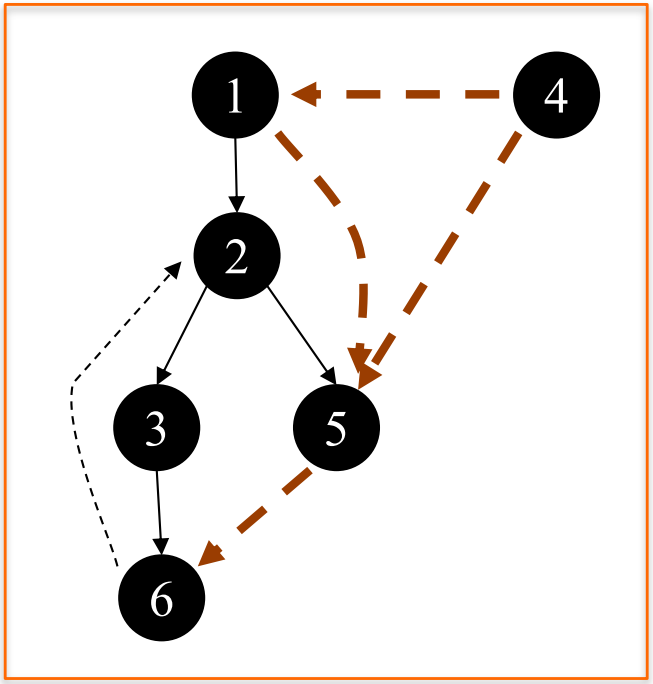


árvore de busca
em profundidade

Primeiro vértice não descoberto adjacente a 4: nenhum
Tempo de descoberta: -
Ação: vértice 4 torna-se preto
Tempo de término: 12

BUSCA EM PROFUNDIDADE: EXEMPLO 2





árvore de busca
em profundidade

em um grafo direcionado, podem ocorrer ainda arestas de avanço e de cruzamento

Busca em Profundidade: Uso

- O algoritmo é base para outros algoritmos importantes
  - verificação de grafos acíclicos
  - descoberta de caminhos
  - ordenação topológica
  - descoberta de componentes fortemente conectados

Busca em Profundidade: Complexidade

$$O(|V| + |A|)$$

- Característica
  - linear em relação ao tamanho da representação do grafo usando listas de adjacência
- $O(|V|)$
  - cada vértice *u* torna-se a raiz de uma nova árvore de busca em profundidade apenas uma única vez (visitaDFS)
- $O(|A|)$
  - no visitaDFS, o laço é executado |adj[u]| vezes, ou seja, $O(|A|)$ no total

Bibliografia

- N. Ziviani. Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.

- T. H. Cormen, C. E. Leiserson and R. L. Rivest. Introduction to Algorithms, MIT Press, 2nd Edition, 2001.