

ICMC – USP  
EST5510 – Teoria Assintótica – 2<sup>o</sup>/2019  
5<sup>a</sup> lista de exercícios

1. (a)  $X, (X_n)_{n \geq 1}, (Y_n)_{n \geq 1}$  e  $(Z_n)_{n \geq 1}$  são variáveis aleatórias tais que  $X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{P} a$  e  $Z_n \xrightarrow{P} b$ , em que  $a, b \in \mathbb{R}$ . Prove que  $Y_n + Z_n X_n \xrightarrow{D} a + bX$ .  
(b) Se  $X_n \xrightarrow{D} X$  e  $(c_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de números reais tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ , em que  $c$  é um ponto de continuidade de  $F_X$ , prove que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(c_n) = F_X(c)$ .
2.  $(X_n)_{n \geq 1}$  são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme  $((0, \theta])$ ,  $\theta > 0$ .  
(a) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$  e discuta sua consistência<sup>1</sup>.  
(b) Para  $n$  fixo, o estimador é não viesado?
3. (a)  $(X_n)_{n \geq 1}$  são variáveis aleatórias  $\stackrel{iid}{\sim} \text{normal}(\theta, 1)$ . Apresente um estimador consistente para  $I_{\{0\}}(\theta)$ .  
(b) Desenvolva um estudo de simulação de Monte Carlo para ilustrar o resultado obtido no item anterior.
4. Considere variáveis aleatórias  $X_{it} \stackrel{indep.}{\sim} \text{normal}(\mu_i, \theta)$ ,  $t = 1, \dots, T$  e  $i = 1, \dots, n$ .  
(a) Apresente o estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$  e discuta sua consistência quando  $n \rightarrow \infty$  e  $T$  é fixado.  
(b) Se o estimador do item (a) não for consistente, apresente um estimador consistente para  $\theta$ .
5. Considere o modelo estatístico

$$Y_i = \beta x_i + \epsilon_i \quad \text{e} \quad X_i = x_i u_i,$$

em que  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  são variáveis aleatórias i.i.d. com  $E(\epsilon_i) = 0$ ,  $\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma_\epsilon^2$ ,  $u_1, \dots, u_n$  são variáveis aleatórias i.i.d. com  $E(u_i) = 1$ ,  $\text{Var}(u_i) = \sigma_u^2$  conhecida e  $\epsilon_i$  e  $u_j$  são independentes para  $i, j = 1, \dots, n$ . Os dados disponíveis são observações dos pares  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

- (a) Supondo que  $(x_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de números reais, discuta a consistência do estimador  $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n X_i Y_i / \sum_{i=1}^n X_i^2$ .
- (b) Se o estimador do item (a) não for consistente, apresente um estimador consistente para  $\beta$ .
- (c) Supondo que  $(x_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com  $E(x_i) = \mu_x$ ,  $\text{Var}(x_i) = \sigma_x^2$  e os ternos  $(x_i, \epsilon_j, u_k)$  são independentes para  $i, j, k = 1, \dots, n$ , refaça os itens (a) e (b) acima.

---

<sup>1</sup>“Estimador consistente”  $\hat{\theta}$ , digamos, refere-se a uma sequência de estimadores  $(\hat{\theta}_n)_{n \geq 1}$  satisfazendo  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$  ou  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{q.c.} \theta$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , para todo  $\theta \in \Theta$ .