CALCULO NUMÉRICO I

3° Lista: Solução de sistemas lineares – Métodos Iterativos

1. Considere o sistema: $\begin{cases} 6x_1 \quad -x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$

a. Enuncie algum critério que garanta a convergência dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel e verifique se é satisfeito.

b. Aplique o método iterativo de Gauss-Seidel, a partir do ponto $\boldsymbol{x^o} = (1, 1, 1)^T$ e use como tolerância para o critério de parada $\varepsilon = 10^{-1}$ ou máximo de 3 iterações.

2. Considere a matriz **A** = $\begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e o sistema **Ax=b**, em que **b** = $(-1 \ \ 3 \ \ -1)^T$.

a. Verifique se a convergência do método de Gauss-Seidel é garantida por algum critério. Em caso negativo, pode-se afirmar que o método não converge? Explique.

b. Aplique o método de Gauss-Seidel (escolha o ponto inicial).

3. Considere o sistema linear de equações:

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 2 \\ -x_1 + 10x_2 - x_3 \qquad &= -3 \\ -x_2 + 10x_3 - x_4 &= 3 \\ -x_3 + 10x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Verifique se os métodos de Jacobi-Richardson e Gauss-Seidel são convergentes para este sistema e resolva por ambos métodos.

4. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

a. Utilize o método iterativo de Gauss-Seidel para encontrar a solução. Faça 4 iterações. Observa convergência da sequência?

b. Verifique se algum critério de convergência é satisfeito.

5. Considere o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} K & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ K & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determine os valores de K para que o sistema satisfaça o critério de convergência das linhas.

6. Considere o sistema: $\begin{cases} 5x_1 \quad -x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$

a. Escreva um pseudocódigo para o método de Gauss-Seidel, explicitando o critério de parada que verifique:

i) dois pontos consecutivos da seqüência gerada são próximos;

ii) o número máximo de iterações.

b. Aplique o método iterativo de Gauss-Seidel, a partir do ponto $\boldsymbol{x^o} = (1, 1, 1)^T$.

7. As afirmações a seguir são falsas ou verdadeiras. Justifique.

a. Se $f(a)\cdot f(b)<0$, então existe uma raiz de f no intervalo [a b].

b. se $f:R\rightarrow R$ contínua e $f(a)\cdot f(b)<0$, então existe uma raiz de f no intervalo [a b]

c. Seja $\varphi: R\rightarrow R$ uma função diferenciável e suponha que $|\varphi'(\bar{\mathbf{x}})|=0$. Então o processo $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ é convergente para x_0 suficientemente próximo de $\bar{\mathbf{x}}$.

d. Seja $\varphi: R\rightarrow R$ uma função diferenciável e suponha que $|\varphi'(\bar{\mathbf{x}})|=0$. Então o processo $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ é convergente sempre.

e. Quando resolvemos um sistema de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss sempre obtemos uma solução

f. O método de eliminação de Gauss **com** pivotamento parcial sempre obtém uma solução melhor do que o método de eliminação de Gauss **sem** pivotamento parcial

g. Em geral, o método de eliminação de Gauss **com** pivotamento parcial obtém uma solução melhor do que o método de eliminação de Gauss **sem** pivotamento parcial

h. O método de eliminação de Gauss pode ser usado para obter a inversa de uma matriz.

i. O método de Cholesky somente pode ser utilizado se $\det(A)>0$.

j. O método de Eliminação de Gauss somente pode ser utilizado se $\det(A)>0$.

l. Se **A** é diagonalmente dominante, então o método iterativo de Gauss-Seidel é convergente.

m. Se a matriz **A** não é diagonalmente dominante então o método iterativo de Gauss-Seidel não é convergente.

n. Se o critério de Sassenfeld é satisfeito, então o método iterativo de Gauss-Seidel é convergente.

o. Se o critério de Sassenfeld não é satisfeito, então o método iterativo de Gauss-Seidel não é convergente.