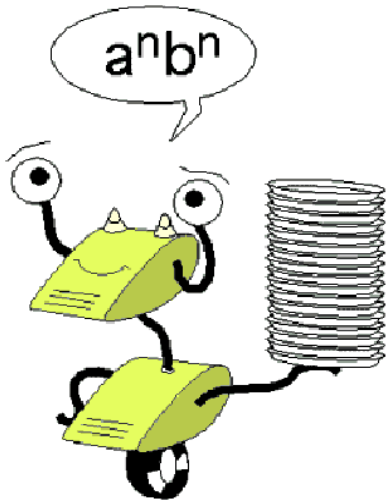
Autômatos com Pilha

Autômatos com Pilha:
Reconhecedores de LLCs



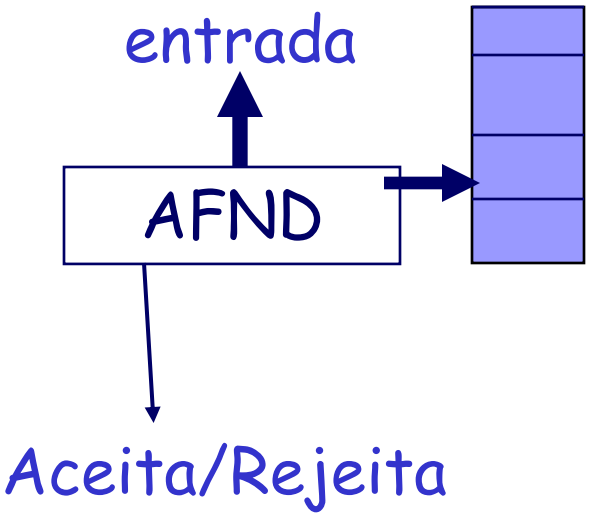
Autômatos com Pilha (AP)

- Definições alternativas para Linguagens Livres de Contexto
- Extensão de AFND com uma pilha, que pode ser lida, aumentada e diminuída apenas no topo.
- 2 variações de AP:
  - Aceita cadeias por estados de aceitação
  - Aceita cadeias por pilha vazia
- As 2 variações aceitam exatamente as LLC

  (GLC ⇐⇒ AP)
- APDeterminísticos: aceitam todas as LR e parte das LLC

AP – Definição Informal

- A pilha permite memorizar uma quantidade infinita de informações. Ao contrário de um computador, que também pode armazenar quantidade arbitrária de informações, o AP tem a restrição do comportamento da pilha (LIFO).



AP

- O AP decide a mudança de estado baseado no símbolo atual da entrada, no estado atual, e no símbolo do topo da pilha.
- Ele pode, alternativamente, fazer uma transição espontânea, usando ε (cadeia nula) como entrada. Em uma transição, o AP:
  - Consome da entrada o símbolo que ele utiliza na transição. Se ε for usado, nenhum símbolo da entrada é consumido.
  - Vai para um novo estado, que pode ou não ser o mesmo estado anterior.
  - Substitui o símbolo do topo da pilha por qualquer cadeia. A cadeia pode ser ε (eliminação na pilha); pode ser o mesmo símbolo do topo (nenhuma alteração), ou um ou mais símbolos distintos (eliminação + inserção).

Exemplo 1

- Encontre um AP M que reconheça o conjunto $L = \{ w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ e } w \text{ tem igual número de 0 e 1} \}$, por pilha vazia.

- Mostre as configurações do AP com a entrada 0101

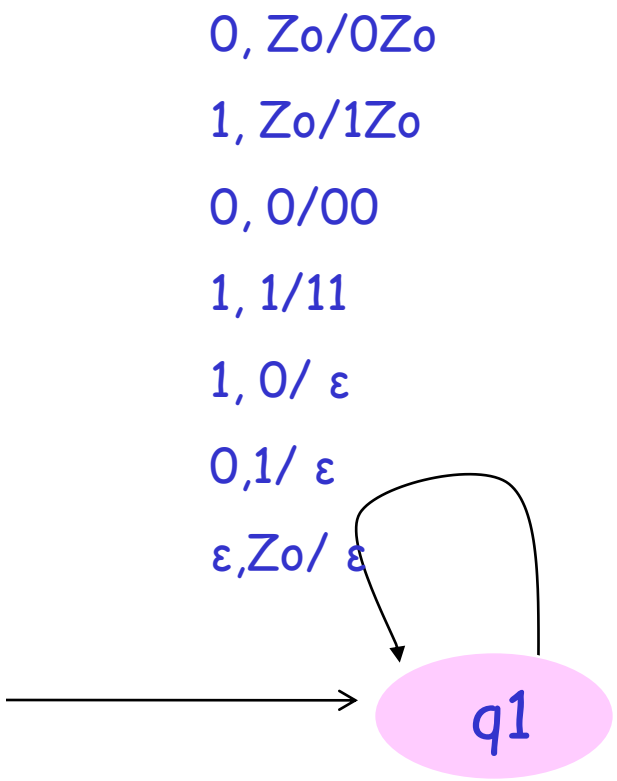
Dica:

- Empilhar 0´s e 1´s, e
- "matar" 0 com 1 e 1 com 0
- fazer regra para aceitar cadeia vazia

M = ({q1},{0,1},{Zo,0,1}, δ, q1,Zo, $\varnothing$)

1. $\delta(q1, 0,Zo) = \{(q1,0Zo)\}$ *empilha primeiro 0*
2. $\delta(q1, 1,Zo) = \{(q1,1Zo)\}$ *empilha primeiro 1*
3. $\delta(q1, 0,0) = \{(q1,00)\}$ *empilha 0 consecutivos*
4. $\delta(q1, 1,1) = \{(q1,11)\}$ *empilha 1 consecutivos*
5. $\delta(q1, 1,0) = \{(q1, \varepsilon)\}$ *desempilha se 1 com 0*
6. $\delta(q1, 0,1) = \{(q1, \varepsilon)\}$ *desempilha se 0 com 1*
7. $\delta(q1, \varepsilon,Zo) = \{(q1, \varepsilon)\}$ *desempilha no fim da cadeia*

AP para L = cadeias com igual número de 0s e 1s (por pilha vazia)



Repare que o AP é Determinístico

Configurações para 0101

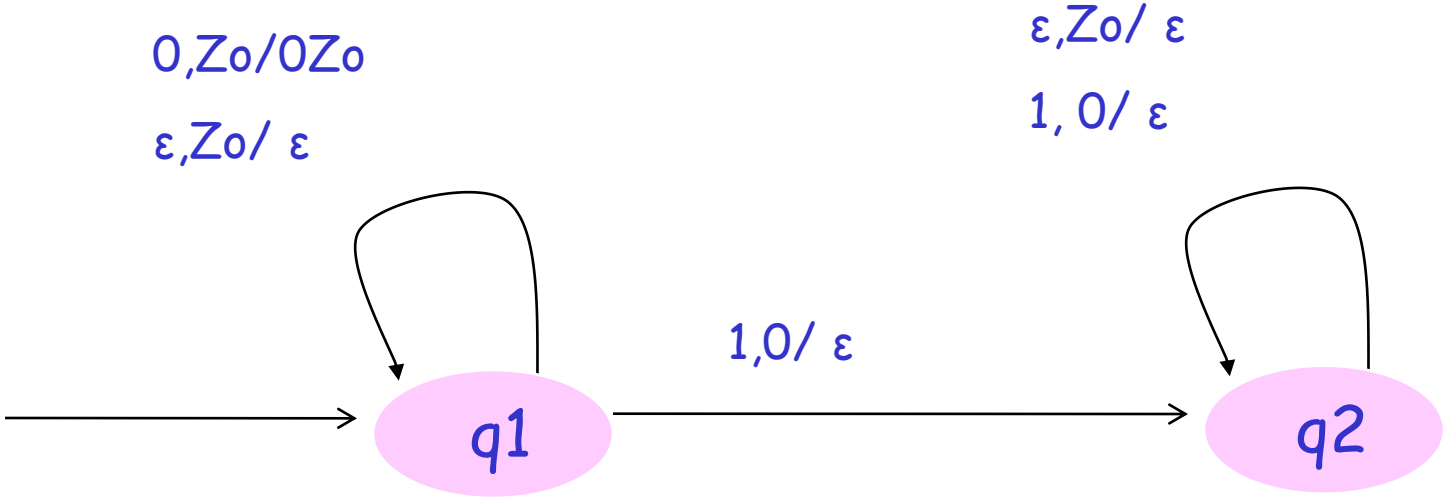
Entrada	Configuração
	(q1,Zo)
0	(q1,0Zo)
01	(q1,Zo)
010	(q1,0Zo)
0101	(q1,Zo)
ε	(q1, ε)

Exemplo 2

- Modifique o AP anterior para aceitar

  $L = \{0^n1^n;\ n \geq 0\}$, por pilha vazia

- Ideia: empilhe os n 0´s e desempilhe-os ao encontrar sua contraparte nos 1´s. Se a pilha estiver vazia após ler o último, então será aceita



Um AP M é uma sétupla (K, Σ, Γ, δ, qo, Zo,F) onde:

1. K é um conjunto finito de estados
2. Σ (sigma) é um alfabeto finito chamado alfabeto de entrada
3. Γ (gama) é um *alfabeto da pilha* finito
4. qo $\in$ K é o estado inicial. A máquina começa nele.
5. Zo $\in \Gamma$ é o símbolo inicial da pilha. Aparece inicialmente na pilha.
6. F é o conjunto de estados finais $F \subseteq K$
7. δ (delta) é um mapeamento de

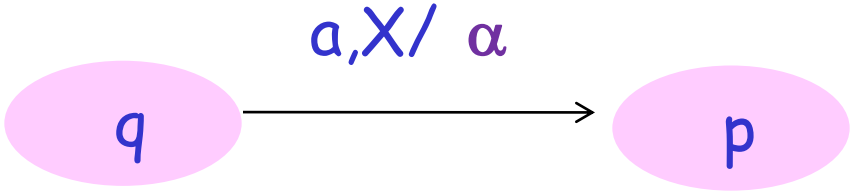
$$K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \text{subconjuntos de } K \times \Gamma^*$$

(topo)

O resultado da aplicação de δ é um conjunto finito de pares (p,γ) onde p é o novo estado e γ é a cadeia de símbolos da pilha que substitui o topo da pilha. Se γ é ε, o topo é eliminado; senão o topo é substituído por γ de tal forma que o 1º. símbolo de γ é o novo topo.

Notação gráfica para AP

- O diagrama de transição para APs que aceitam a linguagem por estado final segue:
- Os nós correspondem aos estados do AP
- Existem o estado inicial e os finais
- Um arco rotulado com a,X/α do estado q para p significa que δ(q,a,X) contém o par (p, α) entre os pares.



- Convencionalmente, Zo é o símbolo da pilha (no JFLAP é Z).

Linguagem aceita por um AP

1. Aceitação por Estado Final: (Similar a AF)
   Conjunto de todas as cadeias para as quais alguma sequência de movimentos faz o AP entrar num estado final → Linguagem aceita por estado final, $L(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha); q \in F\}$

(q, ε, α):

- para no estado q, final,
- após o último símbolo da cadeia (ε),
- com α na pilha.

Linguagem aceita por um AP

2. Aceitação por Pilha Vazia:

   Conjunto de todas as cadeias para as quais alguma sequência de movimentos, a partir do inicial, faz com que a pilha fique vazia → Linguagem aceita por Pilha vazia $N(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$

$(q, \varepsilon, \varepsilon)$:

- para no estado q,
- após o último símbolo da cadeia (ε),
- com pilha vazia (ε).

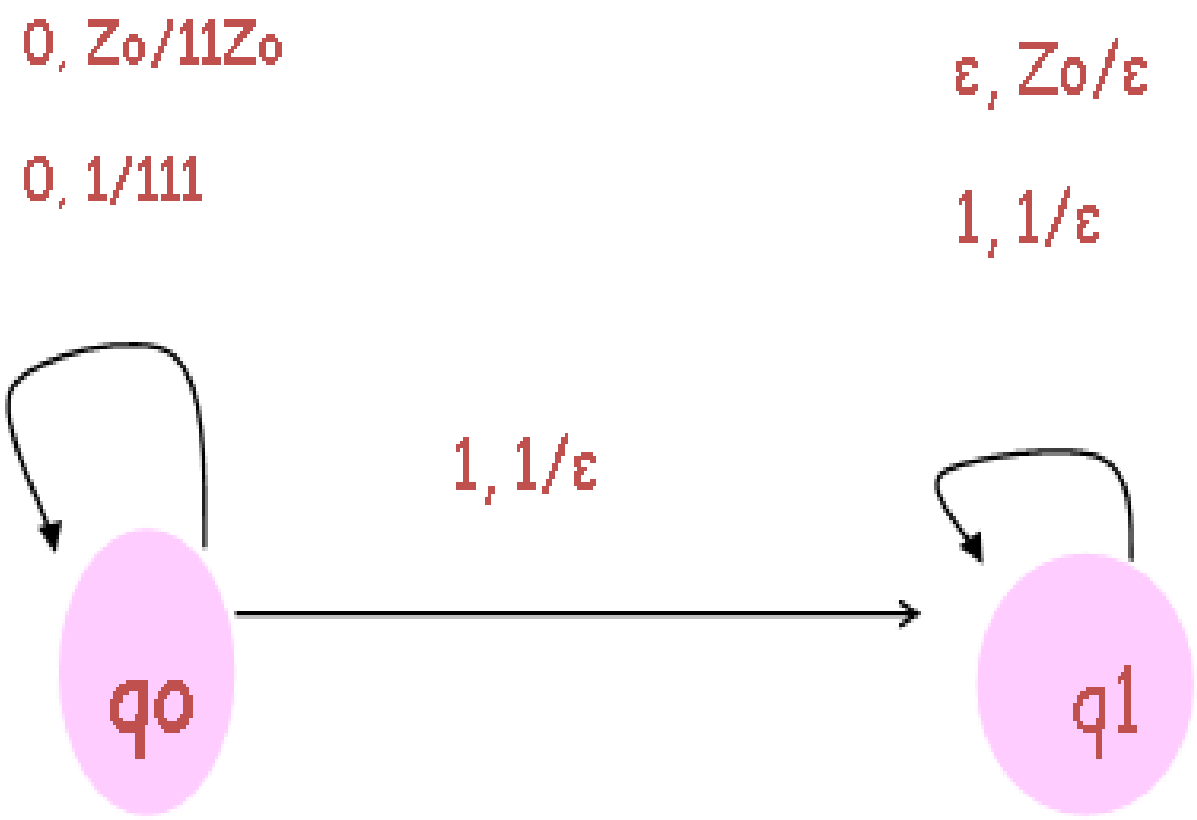
OBS: quando aceitamos por pilha vazia o conjunto de estados finais é irrelevante.

- Os dois métodos anteriores são equivalentes.
- Ou seja, se uma linguagem L é aceita por algum AP por estado final (L(P)=L), então existe um AP por pilha vazia tal que N(P) = L. E vice-versa.

Exemplo 3

- Encontre um AP M que reconheça o conjunto $L = \{ 0^n 1^{2n} \mid n > 0 \}$ por pilha vazia.
- Ideia: para cada 0 lido, empilhar a subcadeia 11. Para cada 1 lido, desempilhar um 1 da pilha. Se ao acabar a cadeia a pilha estiver vazia, a cadeia é aceita.

AP= ({qo,q1}, {0,1}, {0,1,Zo}, δ , qo, Zo)

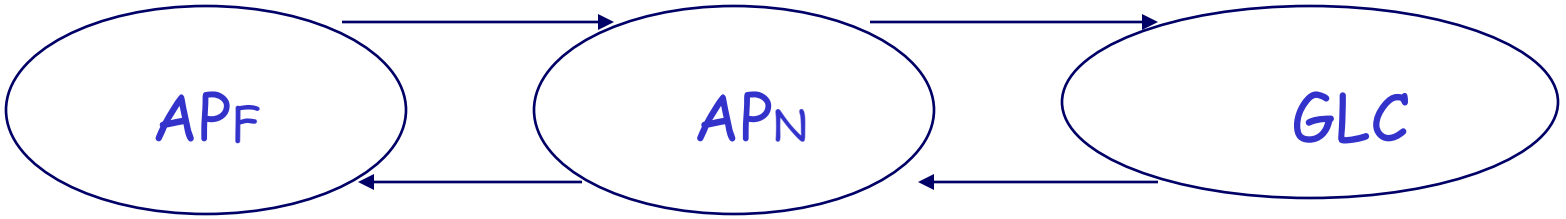


Repare que L é LC, mas não é Regular, e o AP é Determinístico

- Seja a Linguagem Regular L= a*.
- Construa um AP para L e verifique que a pilha não é necessária, ou seja, um AF seria suficiente.

Equivalência de AP e Gramática Livre de Contexto

São equivalentes:



Por estado final

Por pilha vazia

AP Determinísticos (APD)

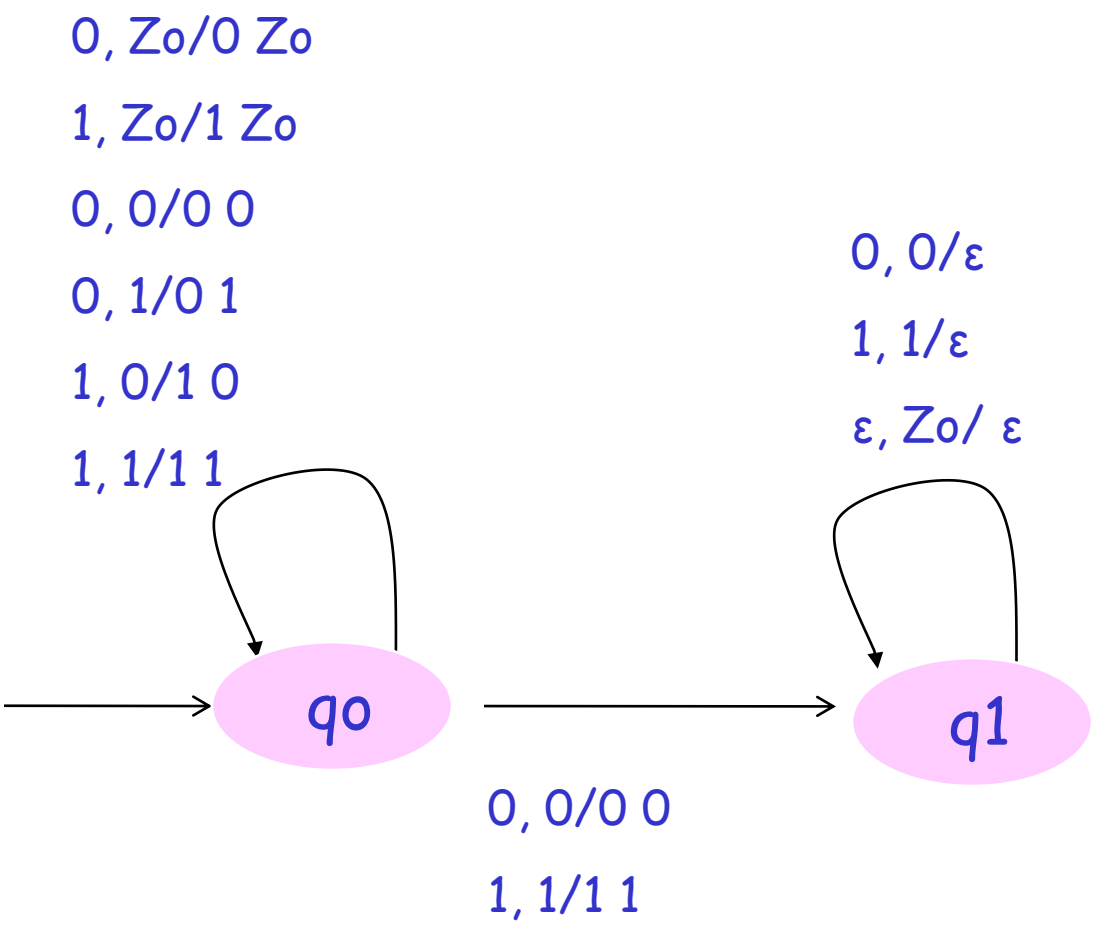
- Por definição, os AP podem ser não-determinísticos;
- A classe de AP determinísticos são especiais: embora limitada, a classe de linguagens reconhecidas por eles é interessante no contexto de linguagens de programação.

APD & LLC

- APD não reconhecem todas as LLCs.
- Por exemplo, não existe um APD que reconheça

L_{ww^r} = {ww^r | w está em (0+1)*} – palíndromos de comprimento par sobre {0,1}.

APND de Lww^r por pilha vazia



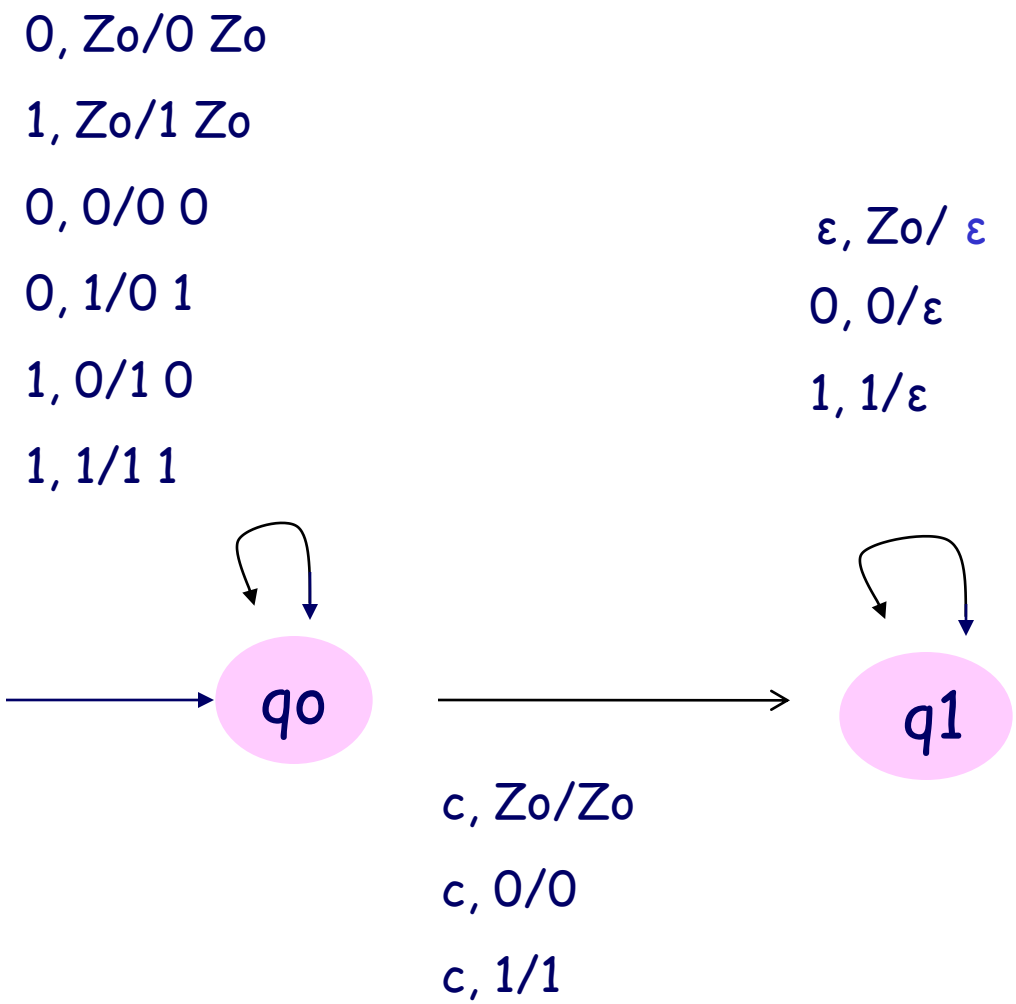
APD & LLC

Porém, se inserirmos um "marcador de centro" *c*, tornamos a linguagem reconhecível por um APD:

$L_{wwr} = \{wcw^r \mid w \text{ está em } (0+1)^*\}$

Estratégia: empilhar 0s e 1s até encontrar *c*. Então muda-se para um estado em que se compara cada novo símbolo com o topo da pilha, desempilhando se forem iguais, até encontrar Zo no topo; caso contrário, para num estado não final.

APD para $L_{wcw^r} = \{wcw^r \mid w \text{ está em } (0+1)^*\}$, por pilha vazia



APD e Linguagens Regulares

Os APD aceitam uma classe de linguagens que estão entre as LR e as LLC.

- **Teorema 1**: Se L é uma LR, então L=L(P) para algum APD P.

- Mas os APD tb aceitam LLC que não são Regulares (vide exemplo 3 anterior)

APD por estado final e as LLC

- As linguagens aceitas por APDs incluem as LRs, mas também incluem outras LLCs.
- Ex. L_{wcw^r}

- Ou seja, há LLCs para as quais não existe um APD que as reconhece (há apenas APND).
- Ex. L_{ww^r}

Observação

- D. Knuth definiu, em 1965, as gramáticas LR(k), uma subclasse das GLC que geram exatamente as linguagens reconhecidas por APDs.
- As gramáticas LR(k) formam a base para o YACC *(yet another compiler compiler)* do Unix, que gera um programa em C, que é um analisador sintático para a linguagem definida por uma LR(k), dada como entrada.

APD e Gramáticas Ambíguas

- Teorema: Se L = N(P) para algum APD P (por pilha vazia), então L tem uma GLC não-ambígua.

- Teorema: Se L = L(P) para algum APD P (por estado final) então L tem uma GLC não-ambígua.

(isso nos indica que as linguagens inerentemente ambíguas só podem ser reconhecidas por APND)

Gramáticas e reconhecedores

Linguagens/Gramáticas	**Reconhecedores**
Rec. Enumerável	Máquina de Turing
Sensível ao contexto	Máquina de Turing com memória limitada ou Autômato Linearmente Limitado
Livre de contexto	Autômato a pilha
Regular	Autômato finito

Gramáticas Sensíveis ao Contexto (GSC)

Linguagens Sensíveis ao Contexto (LSC)

Autômatos Linearmente Limitados

(ALL)

Autômatos Linearmente Limitados -ALL: Reconhecedores de LLCs

Para que um autômato seja capaz de reconhecer LSCs que não sejam LLCs, ele deve ser uma Máquina de Turing, mas pode ter a seguinte restrição:

- O espaço de fita ocupado é linear em relação ao comprimento da cadeia de entrada a ser reconhecida.

Assim, se $|w|=n$, então $O(n)$ células da fita são utilizadas no reconhecimento de w.

Na verdade, é possível mostrar que apenas n células são necessárias.

Ex. Um ALL para reconhecer a LSC

$$L = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$$

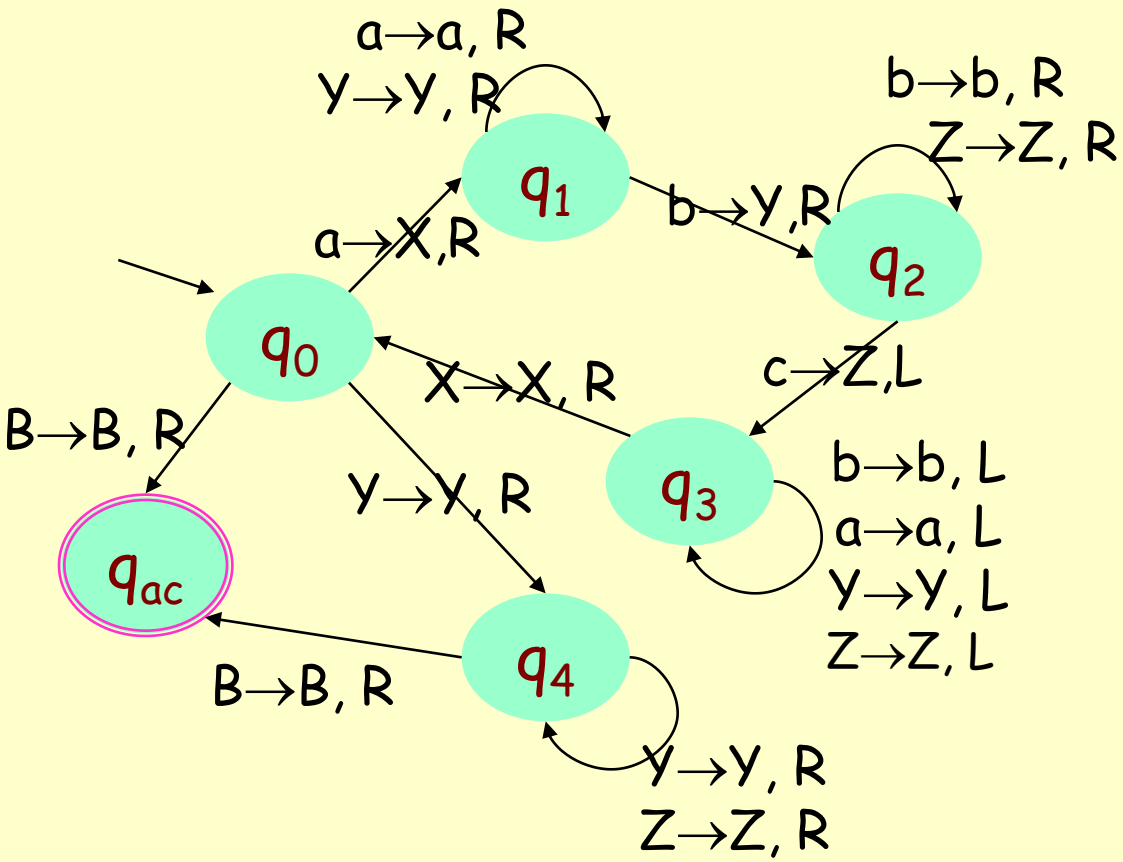
Exemplos:

Pertence à L: aaabbbccc

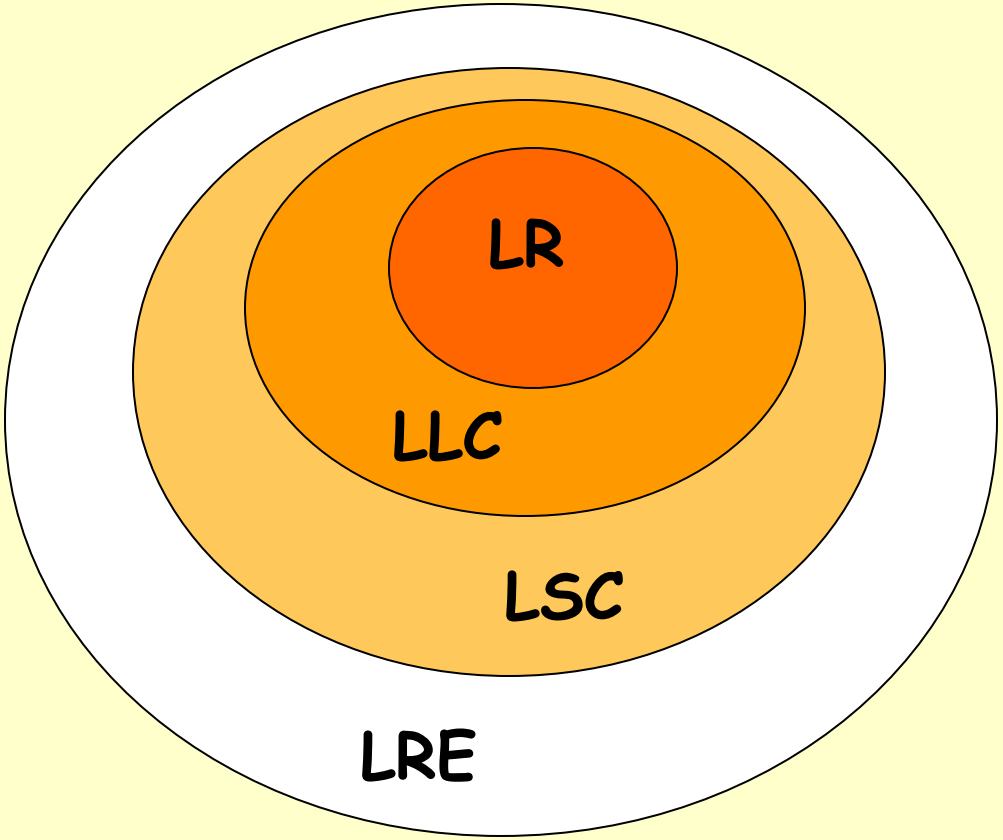
Não Pertence à L: aaabbcccc

Ideia: em cada passo, reconhecer um a, um b e um c, substituindo-os por X, Y e Z, respectivamente.

1. $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_{ac}\}$
2. $\Sigma = \{a, b, c\}$
3. $\Gamma = \{a, b, c, B, X, Y, Z\}$
4. δ a seguir.
5. q_0 – o estado inicial
6. $F = \{q_{ac}\}$


a→a, R
Y→Y, R
q1
b→b, R
Z→Z, R
b→Y,R
q2
a→X,R
q0
X→X, R
c→Z,L
B→B, R
q3
b→b, L
a→a, L
Y→Y, L
Z→Z, L
Y→Y, R
qac
q4
B→B, R
Y→Y, R
Z→Z, R

Hierarquia de Chomsky



LR = Linguagens Regulares
LLC = Linguagens Livres de Contexto
LSL =Linguagens Sensíveis ao Contexto
LEF = Linguagens Recursivamente Enumeráveis

Linguagens e Reconhecedores

Linguagem	Gramática	Reconhecedor	Tempo para reconhecer w; |w|=n
Tipo 0: Linguagens Computáveis ou Recursivamente Enumeráveis	Gramáticas com Estrutura de Frase	Máquinas de Turing	NP-completo
Tipo 1: Sensíveis ao Contexto	Gramáticas Sensíveis ao Contexto	Máquinas de Turing com memória limitada	Exponencial: $O(2^n)$
Tipo 2: Livres de Contexto	Gramáticas Livres de Contexto	Autômatos à Pilha	Polinomial Espaço: $O(n)$; Tempo: Geral: $O(n^3)$; Não-ambíguas: $O(n^2)$
Tipo 3: Conjuntos Regulares	Gramáticas Regulares	Autômatos Finitos	Linear: $O(n)$ e $O(\|E\|)$ (no tamanho do AF)