[redacted]

SEGUNDO TRABALHO

Um projeto para a construção de barragens em rios envolve a análise de diversos fatores físicos. Um dos principais fatores é a influência que a temperatura do ambiente exerce sobre a barragem, após sua implantação. Como podemos observar nas figuras acima, uma barragem geralmente está em contato com três temperaturas distintas: a temperatura do ar de um lado, a temperatura da água de outro e a temperatura do solo em que está construída. O esquema a seguir, traz um exemplo dessa situação.

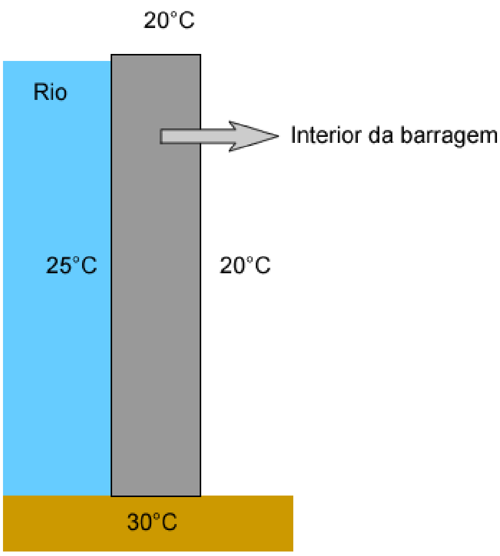

Figura 1: Exemplo de uma barragem (secção vertical).

Nesta análise, os engenheiros estão interessados em conhecer a distribuição da temperatura no interior da barragem em um determinado instante, de modo que eles possam determinam o estresse térmico ao qual a barragem está sujeita. Assumindo que as temperaturas em contato com a barragem sejam mantidas constantes durante um período de tempo específico, a temperatura em seu interior atingirá um certo equilíbrio. Assim, deseja-se obter a distribuição da temperatura decorrente desse equilíbrio em diferentes pontos do interior da barragem. Para isso, podemos considerar alguns pontos do interior da barragem e aproximar a temperatura nestes pontos, a partir das temperaturas exteriores. Essa aproximação é baseada em um importante resultado da física, conhecido como Propriedade do Valor Intermediário.

Considere a superfície correspondente a uma secção vertical na barragem. Podemos traçar uma grade sobre a essa superfície de modo que o encontro de cada duas linhas dessa grade corresponda a um ponto, do qual iremos obter a temperatura correspondente. A figura a seguir ilustra uma grade para a barragem da Figura 1, utilizando 4 pontos interiores.

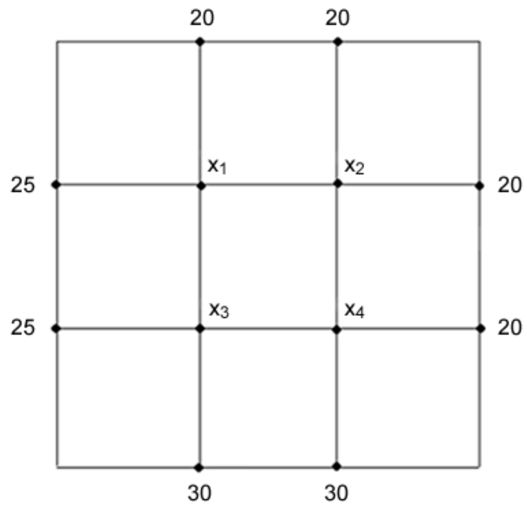

Figura 2: Grade realizada na superfície correspondente à secção vertical da Figura 1.

Observe que já sabemos a temperatura nos pontos sobre a borda da superfície e queremos obter a temperatura nos pontos interiores x_1, x_2, x_3 e x_4. Para isso utilizaremos a Propriedade do Valor Intermediário, que garante o seguinte resultado:

> *Se a superfície está em equilíbrio térmico e P é um ponto que não está sobre a borda da superfície, então a temperatura em P é a média das temperaturas dos 4 pontos da grade mais próximos de P.*

Assim, podemos obter a temperatura nos pontos interiores x_1, x_2, x_3 e x_4 resolvendo o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{20 + 25 + x_2 + x_3}{4} \\ x_2 &= \frac{20 + 20 + x_1 + x_4}{4} \\ x_3 &= \frac{25 + 30 + x_1 + x_4}{4} \\ x_4 &= \frac{20 + 30 + x_2 + x_3}{4} \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 &= 45 \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 &= 40 \\ -x_1 + 4x_3 - x_4 &= 55 \\ -x_2 - x_3 + 4x_4 &= 50 \end{cases}$$

A solução $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ do sistema acima é chamada de *vetor de temperaturas de equilíbrio*. Para esse exemplo, temos $\mathbf{x} = (23.125, 21.875, 25.625, 24.375)$.

Caso haja necessidade em se obter com mais precisão as temperaturas no interior da barragem, mais pontos na grade são necessários e, com isso, um sistema linear de maior dimensão deve ser resolvido. Desse modo, um método numérico deve ser utilizado para efetuar o cálculo das temperaturas computacionalmente.

(Questão 1) Obtenha uma grade para a barragem dada como exemplo na Figura 1, utilizando 25 pontos interiores. Apresente o sistema linear correspondente a essa grade.

(Questão 2) Resolva o sistema linear obtido na Questão 1:

(a) utilizando a decomposição LU da matriz de coeficientes. Você deve implementar um programa que leia os dados do sistema linear, calcule as matrizes L e U e então obtenha a solução do sistema. Apresente as matrizes obtidas e a solução do sistema.

(b) utilizando o método de Gauss-Jacobi. Você deve implementar um programa que leia os dados do sistema linear, utilize a solução inicial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e a tolerância $\varepsilon = 10^{-5}$. Como saída o programa deve apresentar a solução do sistema linear e o número de iterações para obter a solução.

(c) utilizando o método de Gauss-Seidel. Entrada e saída iguais ao item anterior.

Analise os resultados obtidos. Qual método foi o mais adequado para a resolução deste sistema linear? Justifique.

(Questão 3) A matriz de coeficientes do sistema linear da Questão 1 pode ser fatorada utilizando a decomposição de Cholesky? Justifique. Caso seja possível, modifique o programa feito na Questão 2 para obter o fator de Cholesky dessa matriz, a partir das matrizes L e U. Apresente os resultados obtidos.

Observações importantes: O trabalho deve ser feito em formato PDF ou DOC, e enviado para o e-mail ~~do estagiário PAE~~ até a data de entrega. No trabalho devem constar as respostas às questões aqui descritas, bem como o código-fonte dos programas implementados. Justifique suas respostas detalhadamente, porém seja conciso. Se necessário, ~~o estagiário~~ poderá chamar algum membro do grupo para explicar melhor algum tópico do trabalho. Caso seja detectada cópia de trabalhos, as notas correspondentes serão anuladas.