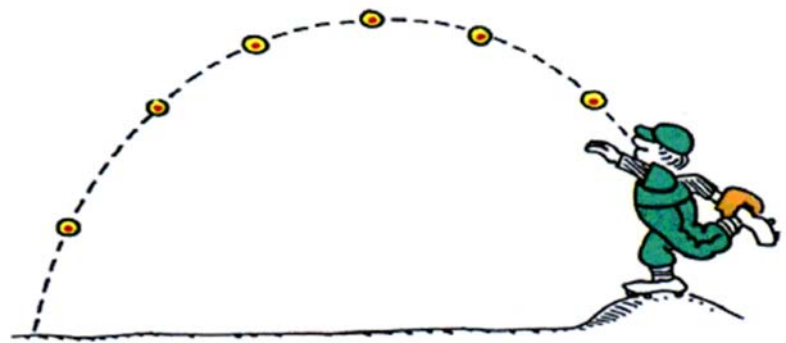
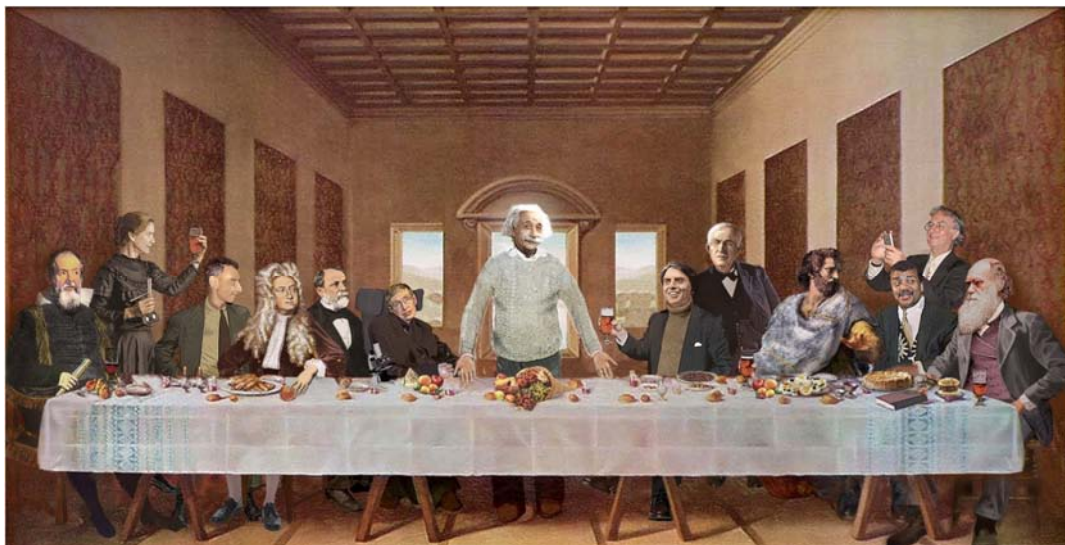


Trajetórias de objetos: fundamentos

Moussa Reda Mansour



Por que Física?????





Por que Física?????

- A física está **presente** no mundo real;
- A física pode tornar os jogos mais **próximos** do mundo real;
- Jogos que consideram a física no desenvolvimento apresentam **maravilhosas** experiências de jogos.



Física em Desenvolvimento de Jogos

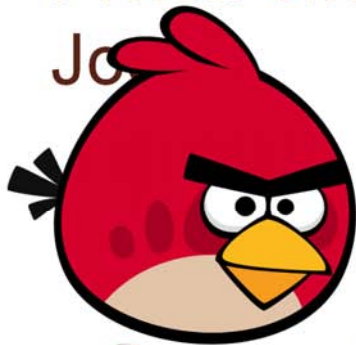
- Não tente desenvolver um modelo físico que represente perfeitamente o problema;
- A maioria dos problemas podem ser aproximados através de física Newtoniana e da teoria de corpos rígidos;
- As simulações devem ser realizadas em tempo discreto (passo contante).

Física em Desenvolvimento de Jogos

- Não tente desenvolver um modelo físico que represente perfeitamente o problema;
- A maioria dos problemas podem ser aproximados através de física Newtoniana e da teoria de corpos rígidos;
- As simulações devem ser realizadas em passos pequenos (passo contante).



Física em Desenvolvimento de Jogos





Cinemática Básica

- A maior parte dos jogos apresentam **iteração** que envolvem **movimentos** no ar (**voar**), terra (correr, dirigir, etc), água (nadar), etc;
- O estudo das leis que regem o **movimento** é **essencial** no desenvolvimento de jogos;
- Jogos mais fiéis ao mundo real.



Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Descreve o movimento de um objeto através de um espaço;
- No desenvolvimento de jogos, o movimento de translação é modelado **constantemente**.

Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Segunda Lei de Newton:

“A força resultante que atua sobre um corpo é proporcional ao produto da massa pela aceleração por ele adquirida”

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

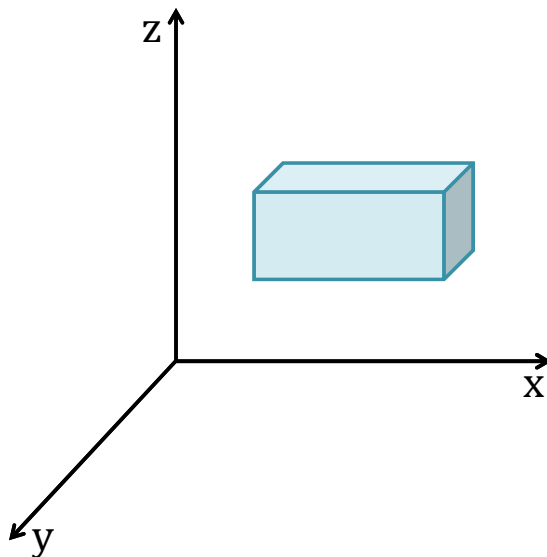
F = força

m = massa

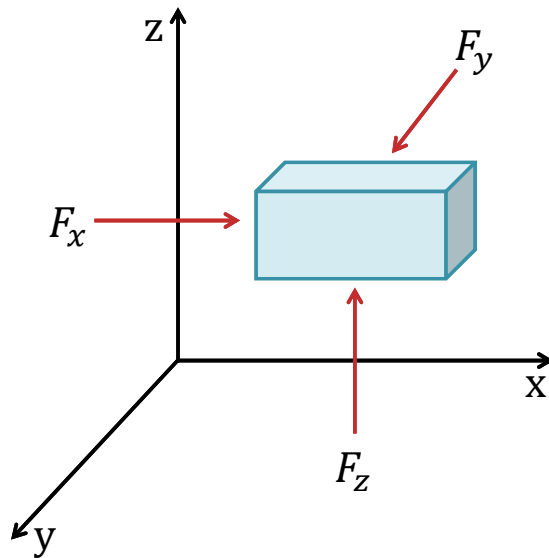
a = aceleração

Cinemática Básica

Movimento de Translação



Movimento de Translação



$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases}$$

Movimento de Translação

- Velocidade do objeto:

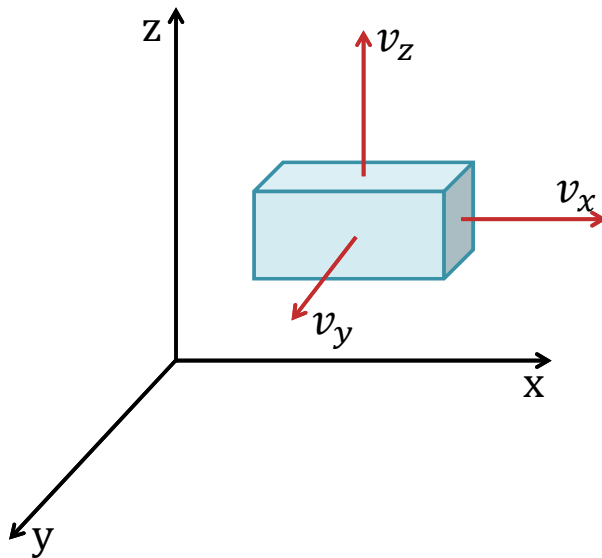
“Relação entre o deslocamento de um objeto em determinado tempo”

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

A aceleração é a taxa temporal de variação da velocidade

$v = \text{velocidade}$

Movimento de Translação



Movimento de Translação

- Localização do objeto:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

A velocidade é a taxa de variação da posição: quanto maior a velocidade, mais rápida é a variação da posição.

$s = \text{localização}$

Movimento de Translação

- Como podemos definir a aceleração na componente x em termos da localização?

$$a_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \frac{d^2x}{dt^2}$$

Movimento de Translação

- Obtendo soluções:
 - Modelos físicos geralmente envolvem Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's)
 - Se a EDO for **simples** a mesma pode ser resolvida diretamente por **equações algébricas**
 - Se a EDO for **complexa**, a solução pode ser obtida via **métodos numéricos** para obtenção de solução de EDOs

Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Exemplo 1:

- Considere a velocidade na componente z dada por:

$$v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1)$$

- Para determinar a localização em z em um dado tempo t é necessário calcular a integral de (1):

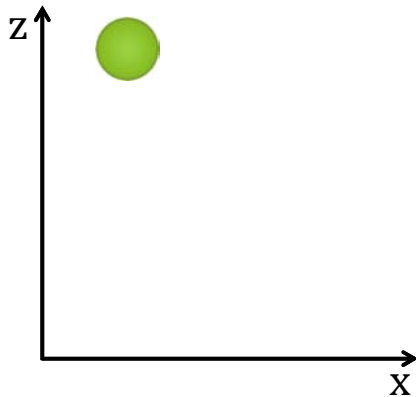
$$z - z_0 = \int v_z dt \quad (2)$$

$z_0 =$ localização inicial de z

Cinemática Básica

Movimento de Translação

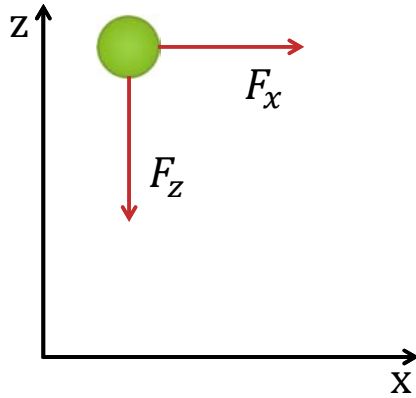
- Exemplo 2: *Objeto em queda*



Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Exemplo 2: *Objeto em queda*



$$F_x = 0$$

$$F_z = ma_z$$

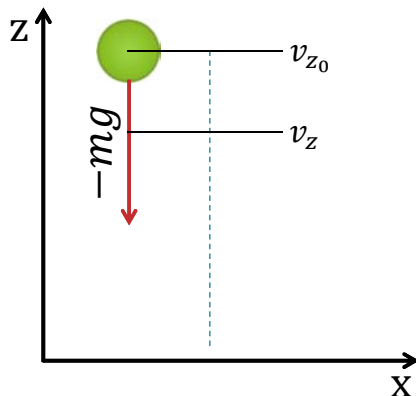
$$a_z = -g$$

$$F_z = -mg$$

Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Exemplo 2: *Objeto em queda*



$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

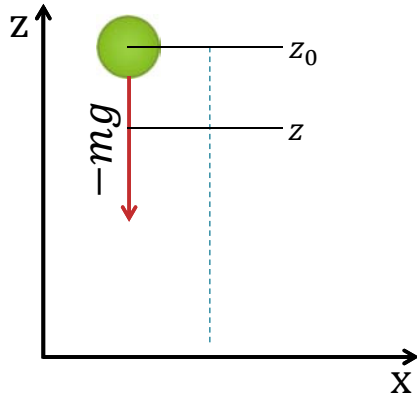
$$\frac{dv_z}{dt} \rightarrow v_z = v_{z_0} + \int a_z dt$$

$$v_z = v_{z_0} - \int g dt$$

Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Exemplo 2: *Objeto em queda*



$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} \rightarrow z = z_0 + \int v_z dt$$

$$z = z_0 + \int (v_{z_0} - gt) dt$$

$$z = z_0 + v_{z_0} t - 0,5gt^2$$

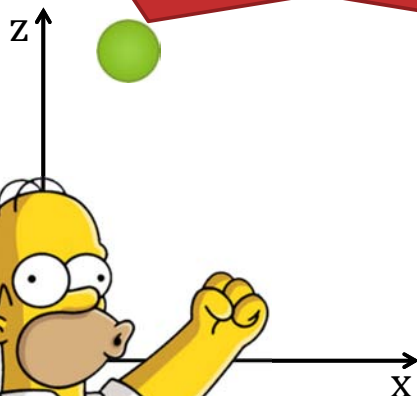
Cinemática Básica

Movimento de Translação

Objeto em queda

Não precisamos aplicar métodos numéricos

Equações algébricas



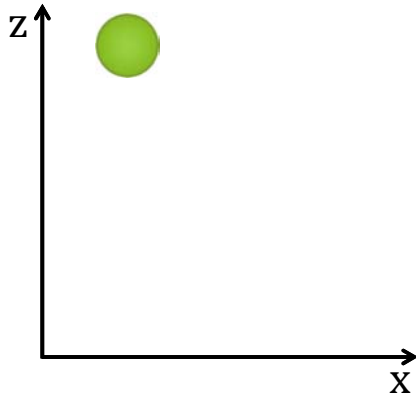
$$v_z = v_{z_0} - gt$$

$$z = z_0 + v_{z_0} t - 0,5gt^2$$

Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Exemplo 2: *Algoritmo e variação*



Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Obtendo soluções via métodos numéricos:
 - Nos exemplos 1 e 2: forças **constantes** = soluções algébricas
 - Em geral, as forças que regem sobre um objeto **não** são constantes e são **variantes** no tempo
 - *Exemplo: um avião em vôo está sujeito a força da resistência aerodinâmica.*

Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Obtendo soluções via métodos numéricos:
 - Métodos de integração numérica
 - *Runge-Kutta de Quarta Ordem*
 - *Euler*
 - *Trapezoidal Implícito*
 - *etc*



Cinemática Básica

Movimento de Translação

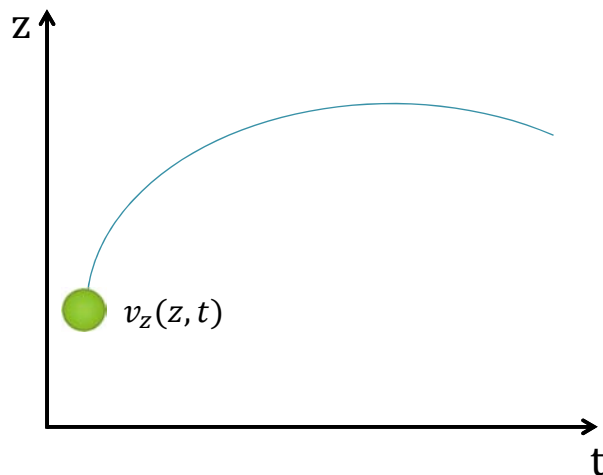
- Obtendo soluções via métodos numéricos:
 - Métodos de integração numérica
 - ***Runge-Kutta de Quarta Ordem***
 - *Euler*
 - *Trapezoidal Implícito*
 - *etc*



Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Considere a EDO de primeira ordem referente á localização do objeto no eixo z

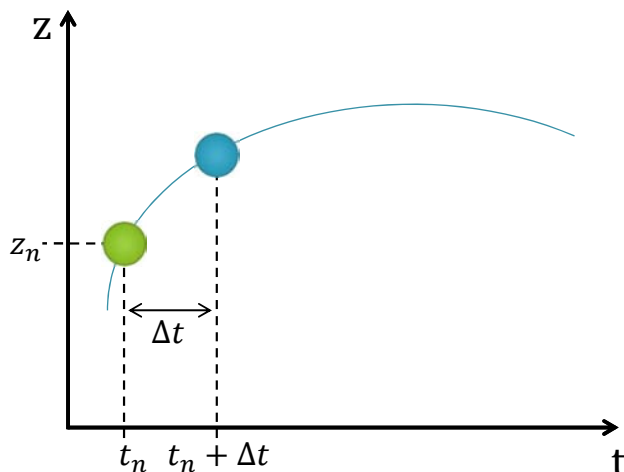


$$\frac{dz}{dt} = v_z(z, t)$$

Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Considere a EDO de primeira ordem referente á localização do objeto no eixo z

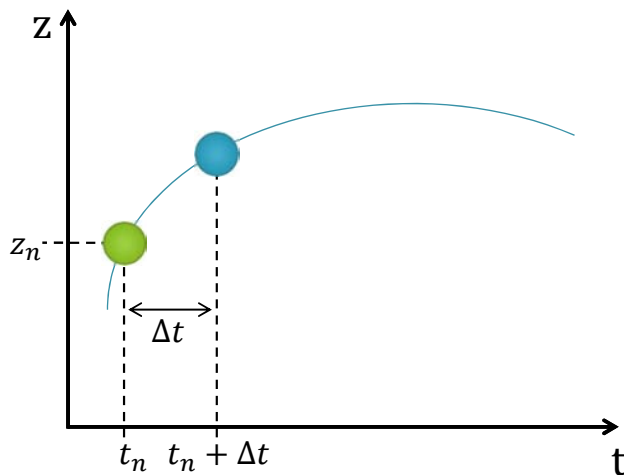


$$\frac{dz}{dt} \approx \frac{\Delta z}{\Delta t} = v_z(z, t)$$

Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Considere a EDO de primeira ordem referente á localização do objeto no eixo z



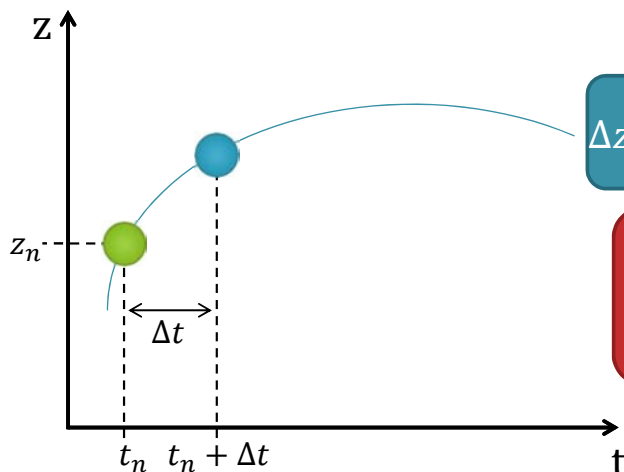
$$\frac{dz}{dt} \approx \frac{\Delta z}{\Delta t} = v_z(z, t)$$

**Considerando
pequenos
incrementos em t**

Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Considere a EDO de primeira ordem referente á localização do objeto no eixo z



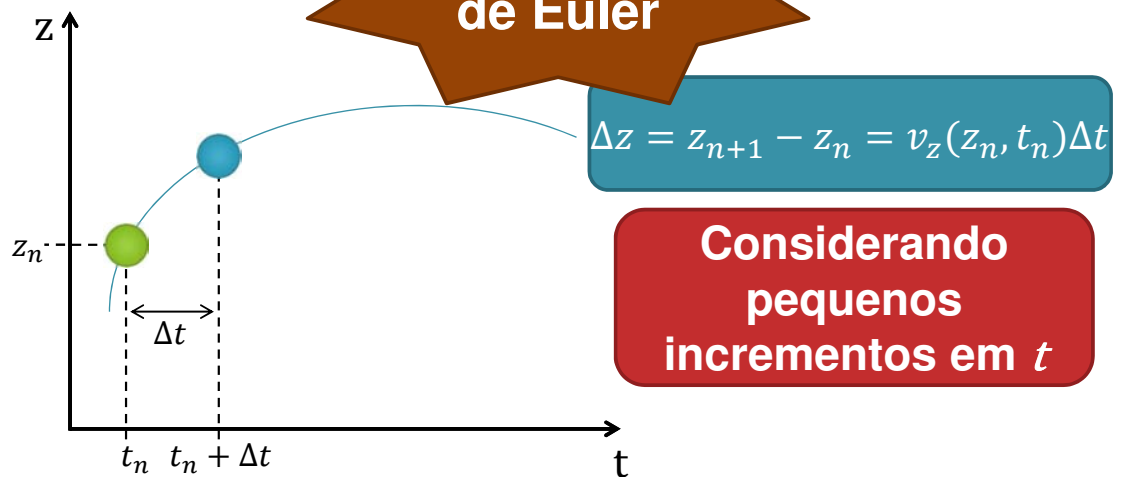
$$\Delta z = z_{n+1} - z_n = v_z(z_n, t_n) \Delta t$$

**Considerando
pequenos
incrementos em t**

Cinemática Básica

Movimento de Translação

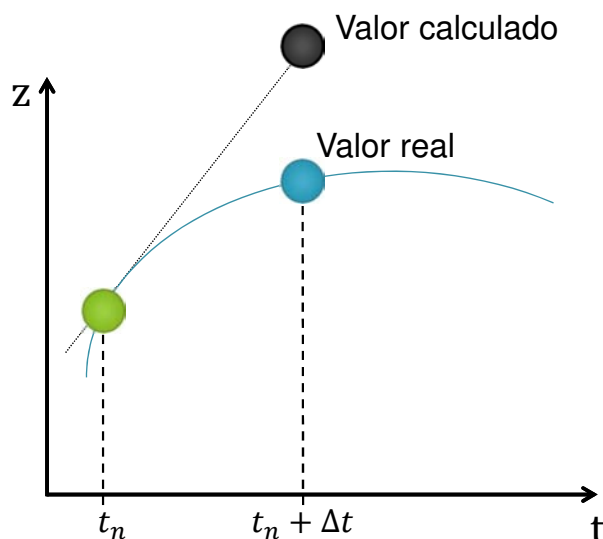
- Considere a EDO de primeira ordem referente à localização do objeto no eixo z



Cinemática Básica

Movimento de Translação

- Imprecisão numérica do método de Euler



Movimento de Translação

- Runge-Kutta de Quarta Ordem (continuação do exemplo)
 - Realiza uma série de estimativas para obter a localização de z , para um dado tempo t
 - A primeira estimativa é dada pelo método de Euler

$$\Delta z_1 = v(z_n, t_n)\Delta t$$

Movimento de Translação

- Runge-Kutta de Quarta Ordem (continuação do exemplo)
 - A segunda estimativa é obtida avaliando a velocidade no “meio caminho” entre as condições já conhecidas e as obtidas pelo método de euler

$$\Delta z_2 = v\left(z_n + \frac{1}{2}\Delta z_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right)\Delta t$$

Movimento de Translação

- Runge-Kutta de Quarta Ordem
(continuação do exemplo)

$$\Delta z_1 = v(z_n, t_n)\Delta t$$

$$\Delta z_2 = v\left(z_n + \frac{1}{2}\Delta z_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right)\Delta t$$

$$\Delta z_3 = v\left(z_n + \frac{1}{2}\Delta z_2, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right)\Delta t$$

$$\Delta z_4 = v(z_n + \Delta z_3, t_n + \Delta t)\Delta t$$

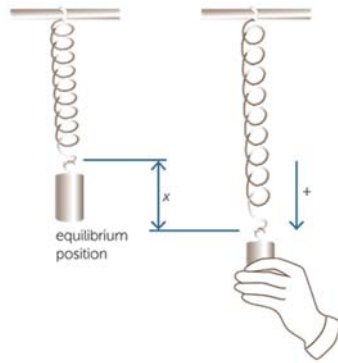
Movimento de Translação

- Runge-Kutta de Quarta Ordem
(continuação do exemplo)

$$z_{n+1} = z_n + \frac{\Delta z_1}{6} + \frac{\Delta z_2}{3} + \frac{\Delta z_3}{3} + \frac{\Delta z_4}{6}$$

Movimento de Translação

- Exemplo 3: *Sistema massa-mola*



$$m \frac{dv_x}{dt} = -\mu v_x - kx$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

- μ – *coeficiente de amortecimento*
- k – *constante da mola*