ICMC – USP – SME0802 Inferência I

2ª prova – 1º/2013

S O L U Ç Ã O (Roteiro)

1. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da população com função densidade

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta^2}\right) I_{(0,\infty)}(x),\ \ \theta > 0.$$

Apresente a função $\tau(\theta)$ para a qual existe um estimador eficiente. Apresente o estimador eficiente da função $\tau(\theta)$.

Solução. Para $x > 0$ temos que $\log(f(x;\theta)) = \log(2x) - x^2/\theta^2 - \log(\theta^2)$ e

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log(f(x;\theta)) = \frac{2x^2}{\theta^3} - \frac{2}{\theta},$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \log(f(x_i;\theta)) = \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2n}{\theta} = \frac{2n}{\theta^3} \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \theta^2 \right).$$

Portanto, $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i^2/n$ é o estimador eficiente de $\tau(\theta) = \theta^2$.

2. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória da distribuição $\mathsf{Poisson}(\theta)$. Apresente o ENVVUM de θ^2. O ENVVUM de θ^2 é eficiente?

Solução. Tendo em vista que $E(\overline{X}^2) = \theta/n + \theta^2$, segue que $\widehat{\theta^2} = \overline{X}^2 - \overline{X}/n$ é um ENV de θ^2. Este estimador é o ENVVUM de θ^2 porque é função apenas da estatística suficiente completa para θ ($\sum_{i=1}^n X_i$). Não é eficiente, pois $\tau(\theta) = \theta$ é a função de θ com estimador eficiente.

`Observação.` Utilizando o segundo momento obtemos outro ENV de θ^2, mas que não é um ENVVUM (Por quê?).

3. O tempo de vida (em anos) de um certo componente segue uma distribuição $\mathsf{exponencial}(\theta)$ em que $f(x;\theta) = \theta \exp(-\theta x) I_{(0,\infty)}(x)$. Com base em uma amostra aleatória de n observações, devemos estimar a probabilidade de que o tempo de vida exceda um ano, denotada por $\tau(\theta)$. Apresente dois estimadores consistentes para $\tau(\theta)$, sendo que um deles deve ser não viesado.

Solução. Calculamos $\tau(\theta) = P_\theta(X > 1) = 1 - P_\theta(X \leqq 1) = 1 - F(x;\theta) = e^{-\theta}$. Vimos que o EMV de θ é dado por $\widehat{\theta} = 1/\overline{X}$. Logo $e^{-1/\overline{X}}$ é um estimador consistente para $e^{-\theta}$.

Definimos $Y = I_{(1,\infty)}(X)$, de modo que Y tem distribuição Bernoulli com parâmetro $P_\theta(Y = 1) = P_\theta\big(X \in (1,\infty)\big) = P_\theta(X > 1) = e^{-\theta}$. Portanto, $\overline{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i/n = \sum_{i=1}^n I_{(1,\infty)}(X_i)/n$ é um ENV e consistente para $e^{-\theta}$.

4. Para cada uma das seguintes distribuições apresente uma estatística suficiente com base em uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$.

   (a)
   $$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta}\exp(-|x|/\theta)I_{\mathbb{R}}(x),\ \theta > 0.$$

   Solução. Tomando $a(\theta) = 1/(2\theta)$, $b(x) = I_{\mathbb{R}}(x)$, $c(\theta) = -1/\theta$ e $d(x) = |x|$, concluímos que $\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ é suficiente (e completa) para θ.

   (b)
   $$f(x;\theta) = \frac{1}{6\theta^4}x^3\exp(-x/\theta)I_{(0,\infty)}(x),\ \theta > 0.$$

   Solução. Tomando $a(\theta) = 1/(6\theta^4)$, $b(x) = x^3 I_{0,\infty}(x)$, $c(\theta) = -1/\theta$ e $d(x) = x$, concluímos que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente (e completa) para θ.

5. Para a distribuição do item 4a, temos que $2\sum_{i=1}^{n}|X_i|/\theta \sim \chi^2_{2n}$ (qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade), cuja esperança é $2n$. Apresente um ENV para θ. O estimador é um ENVVUM? O estimador é consistente?
   Solução. Pelo enunciado temos que $E\big(2\sum_{i=1}^{n}|X_i|/\theta\big) = 2n$, de forma que $\theta = \sum_{i=1}^{n}|X_i|/n$. Logo, $\widehat{\theta} = \sum_{i=1}^{n}|X_i|/n$ é um ENV e consistente para $\theta = E(|X|)$. Este estimador é o ENVVUM de θ, pois é função apenas da estatística suficiente completa (vide item 4a).