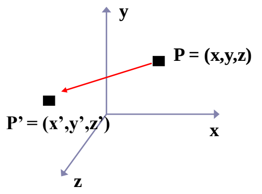
Transformações Geométricas 3D

Rosane Minghim
Maria Cristina F. de Oliveira
ICMC
Universidade de São Paulo

2006

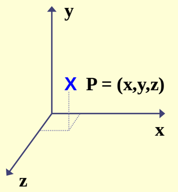
Translação

- Um ponto (objeto) é deslocado de uma posição para outra posição no mesmo espaço 3D

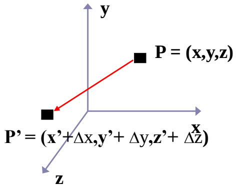


Sistemas de Coordenadas

- Representam uma forma de indexar e localizar elementos no espaço (que é 3D).
- Eixos com orientação formam o Sistema de Coordenadas Cartesianas
- Um ponto P é definido por uma tripla de coordenadas (x,y,z)



Translação



- Vetor Translação: $(\Delta_x\ \Delta_y\ \Delta_z)$

  $x' = x + \Delta_x$

  $y' = y + \Delta_y$

  $z' = z + \Delta_z$
- Representação vetorial do ponto: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- Em coordenadas homogêneas:

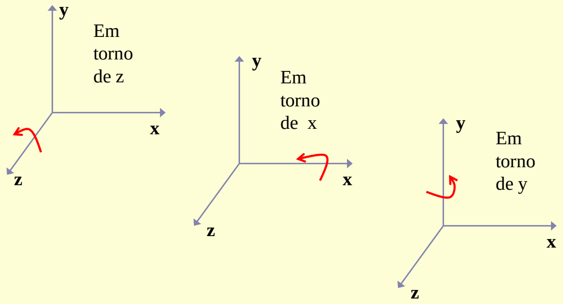
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Ou $P' = T(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) * P$

Rotação

- Em 2D, a rotação se dá em torno de um ponto (1D). Em 3D é necessário especificar uma reta (2D), em torno da qual a rotação ocorrerá
- Um objeto é rotacionado de um ângulo específico em torno de um eixo
- Rotação em torno do eixo x
- Rotação em torno do eixo y
- Rotação em torno do eixo z
- Rotação em torno de um eixo generalizado

Orientação
Sentido Positivo da Rotação

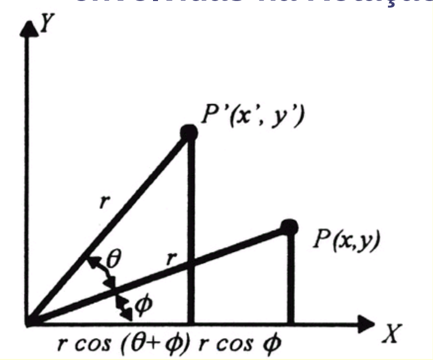


Regras para o sentido positivo de rotação

- Regra da mão direita
- Sentido oposto ao do relógio, quando observado do ‘topo’ do eixo, olhando para o centro
- Regras Específicas:

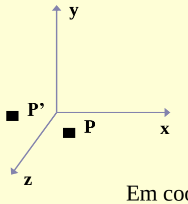
Eixo de Rotação	Direção da Rotação Positiva
x	y para z
y	z para x
z	x para y

Recordando algumas relações envolvidas na Rotação



Rotação em Torno do Eixo z

É dada por:



x'= x*cos(θ) - y*sen(θ)

y'= x*sen(θ) + y*cos(θ)

z'= z

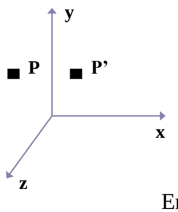
Em coordenadas homogêneas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou:

P'= R_z(θ)*P

Rotação em torno do Eixo y



É dada por:

x'= z*sen(θ) + x*cos(θ)

y'= y

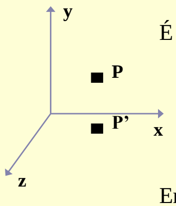
z'= z*cos(θ) - x*sen(θ)

Em coordenadas homogêneas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}(\theta) & & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou: P'= R_y(θ)*P

Rotação em Torno do Eixo x



É dada por:

x'= x

y'= y*cos(θ) - z*sen(θ)

z'= y*sen(θ) + z*cos(θ)

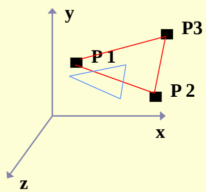
Em coordenadas homogêneas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou:

P'= R_x(θ)*P

Escala

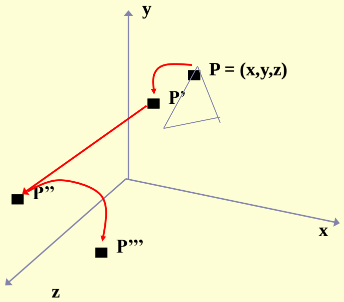


- **Vetor de fator de escala: (S_x S_y S_z)**
  Para cada ponto P = (x,y,z), o correspondente transformado é:
  x' = x*S_x
  y' = y*S_y
  z' = z*S_z
- **Em coordenadas homogêneas:**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Ou P'=S(S_x,S_y,S_z)*P**

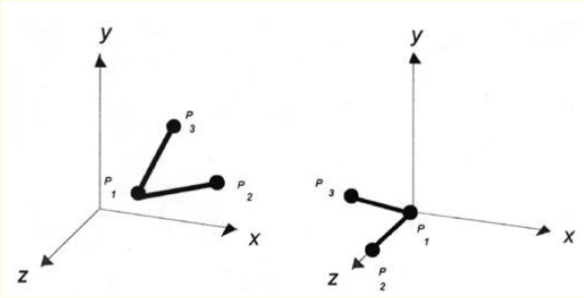
Composição de Transformações



Composição de Transformações

- É dada, como no caso 2D, pela sequência de transformações individuais
- Matematicamente, isto significa multiplicar as matrizes das transformação individuais.
- **Ex:** Deseja-se transformar um ponto P pelas operações de rotação em torno de x de α, seguida de uma translação de (Δx1,Δy1,Δz1), e então de uma rotação em torno de z de β.
- Temos: P'=$R_x(\alpha)$*P1; (1)
  P''= **T(Δx1,Δy1,Δz1)*P1'** (2)
  P'''= $R_z(\beta)$***P1''**; (3)
- Ou: P'''= $R_z(\beta)$* T(Δx1,Δy1,Δz1)* $R_x(\alpha)$*P1
- Isto é, a ordem da multiplicação das matrizes é inversa à ordem das transformações consecutivas!!!

Composição de Transformações Exemplo



Composição de Transformações: Exemplo

1. Translação de P1 = (x_1,y_1,z_1) para a origem.

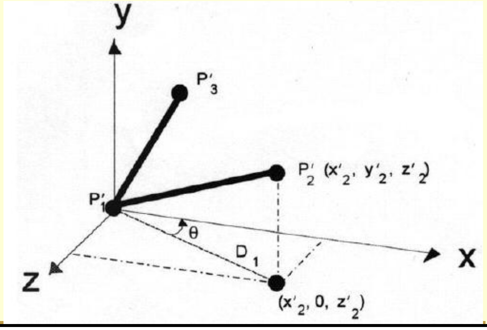
$$T_1(-x_1,-y_1,-z_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P1'=T_1*P1
P2'=T_1*P2
P3'=T_1*P3

Exemplo (cont.)

2. Rotação de P1P2 em torno do eixo y, colocando P1P2 no plano yz.

(lembrando que cos(θ-90) = sin(θ), e cos(θ-90) = -cos(θ))



Exemplo (cont.)

2. Rotação de P1P2 em torno do eixo y, colocando P1P2 no plano yz.

$R_y(-(90-\theta)) = R_y(\theta-90)$

$\cos(\theta-90) = \mathrm{sen}(\theta) = z_2'/D_1 = (z_2-z_1)/D_1$

$\mathrm{sen}(\theta-90) = -\cos(\theta) = -x_2'/D_1 = -(x_2-x_1)/D_1$

$$D_1 = \sqrt{z'^2_2 + x'^2_2} = \sqrt{(z_2-z_1)^2 + (x_2-x_1)^2}$$

$P2'' = R_y(\theta-90) * P2' = (0\ y_2-y_1\ D_1\ 1)^T$

$P1'' = R_y(\theta-90) * P1' = (0\ 0\ 0\ 1)^T = P1'$

$P3'' = R_y(\theta-90) * P3' =$ (?? Faça a mão??)

Exemplo (cont.)

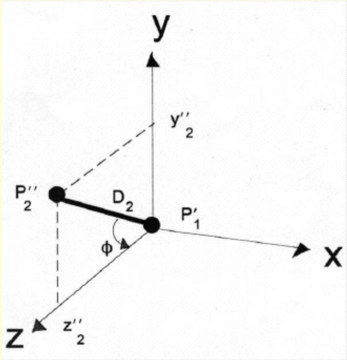
2. Rotação de P1P2 em torno do eixo y, colocando P1P2 no plano yz (Matriz).

$$R_y(\theta-90) = \begin{pmatrix} \cos(\theta-90) & 0 & \mathrm{sen}(\theta-90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}(\theta-90) & & \cos(\theta-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (z2-z1)/D1 & 0 & -(x2-x1)/D1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ (x2-x1)/D1 & & (z2-z1)/D1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo(cont.)

3. Rotação de P1''P2'' em relação ao eixo x, colocando P1'P2'' sobre o eixo z.



Exemplo(cont.)

3. Rotação de P1''P2'' em relação ao eixo x, colocando P1'P2'' sobre o eixo z.

$\cos(\Phi) = z_2''/D_2$

$\text{sen}(\Phi) = y_2''/D_2$

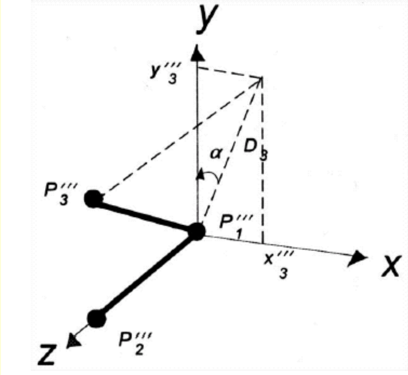
$D_2 = |P1''P2''| = |P1P2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$P2''' = R_x(\Phi) * P2'' = R_x(\Phi) * R_y(\theta\text{-}90) * P2' =$

$= R_x(\Phi) * R_y(\theta\text{-}90) * T_1 * P2 = (0\ 0\ |P1P2|\ 1)^T$

$P3''' = R_x(\Phi) * R_y(\theta\text{-}90) * T_1 * P3$

4. Rotação de P1'''P3''' em relação ao eixo z, colocando P1P3 no plano yz.



4. Rotação de P1'''P3''' em relação ao eixo z, colocando P1P3 no plano yz.

Neste ponto, tem-se $P3''' = (x_3''', y_3''', z_3''')$

$\cos(\alpha) = y_3'''/D_3$

$\text{sen}(\alpha) = x_3'''/D_3$

$D_3 = \sqrt{x_3'''^2 + y_3'''^2}$

$P3'''' = R_z(\alpha) * P3'''$

Assim, a matriz de Composição M, capaz de transformar a figura inicial na figura final, é:

$M = R_z(\alpha) * R_x(\Phi) * R_y(\theta\text{-}90) * T_1(-x_1,-y_1,-z_1)$

Para todos os pontos da figura:

$P_{final} = M * P_{inicial}$

Rotação em Torno de Eixos generalizados

- **Quando paralelo a um dos eixos de coordenadas:**
  - **translade para o eixo de coordenada**
  - **rotacione**
  - **faça a translação inversa**
- **Quando não é paralelo e nenhum dos eixos:**
  - **Faça uma translação de forma que o eixo passe pela origem**
  - **Faça quantas rotações forem necessárias até que o eixo coincida com um dos eixos de coordenadas**
  - **Faça a rotação desejada**
  - **Realize a transformação inversa às rotações de ajuste do eixo**
  - **Faça a translação inversa à primeira translação**

Resumo

- Transformações exercem o papel, em CG, de apoiar o movimento de objetos ou câmeras:
  - para mudar o sistema de coordenadas
  - para apoiar interação
  - para criar animações
- Transformações:
  - Rotação
  - Translação
  - Escala
- Matrizes e Composição de Transformações em 3D

Resumo dos Parâmetros envolvidos nas Transformações

Translação	**Δx**	**>0**	**movimento positivo no eixo**
	Δy	**<0**	**movimento negativo no eixo**
	Δz		
Rotação	**eixo,**		
	ângulo	**>0**	**movimento anti-horário ou pela regra da mão direita**
Escala	**Sx**		
	Sy		**Sx=Sy=Sz escala uniforme**
	Sz		**caso contrário, ocorre deformação**
Composição	**Sequência de Transformações**		**A ordem das transformações deve ser bem especificada**

Bibliografia

Hearn, D. Baker, M. P. Computer Graphics, Prentice Hall, 1994

Foley, J et. al - Introduction to Computer Graphics, Addison-Wesley, 1993.

Watt, A. - Fundamentals of Three-Dimensional Computer Graphics, Addison-Wesley, 1989.