Automatos Finitos

Sistemas de Estados Finitos
AF Determinísticos

(H&U, 1979) e (H;M;U, 2001)

Sistemas de Estados Finitos

- Uma máquina de estados finitos é um modelo matemático de um sistema com entradas e saídas discretas.

- O sistema pode estar em qualquer um de um número finito de estados.

- O estado do sistema sumariza a informação relativa às entradas passadas que é necessária para determinar o comportamento do sistema nas próximas entradas.

Memória Limitada

- AF são exemplos de modelos de computadores com memória limitada.

- Já vimos um exemplo na primeira aula de um AF modelando um interruptor On/Off
  - O interruptor "se lembra" se ele está no estado "on" ou "off" e permite o usuário apertar um botão cujo efeito é diferente, dependendo do seu estado.

- Mas, o que um computador com memória limitada pode fazer????

- Muitas coisas úteis!

Exemplos

- Controlador de porta automática que abre no meio
  - Tem um sensor na frente e outro atrás da porta (para não bater em quem está atrás). O controlador está em 1 dos 2 estados: aberto, fechado e as transições seriam:
    - Frente (que faz a porta abrir e segurar aberta)
    - Atrás (que deixa a porta fechada ou mantém aberta)
    - Ambas (pessoas estão na frente atrás)
    - Nenhuma (não há pessoas nem na frente nem atrás)

Exemplos

- Mecanismo de controle de um elevador
  - O mecanismo não se lembra das requisições de serviços anteriores,
    - cada estado sumariza somente as informações de andar atual e direção (para cima ou para baixo).
  - As entradas para o sistema são as chamadas a serem atendidas.

Exemplos

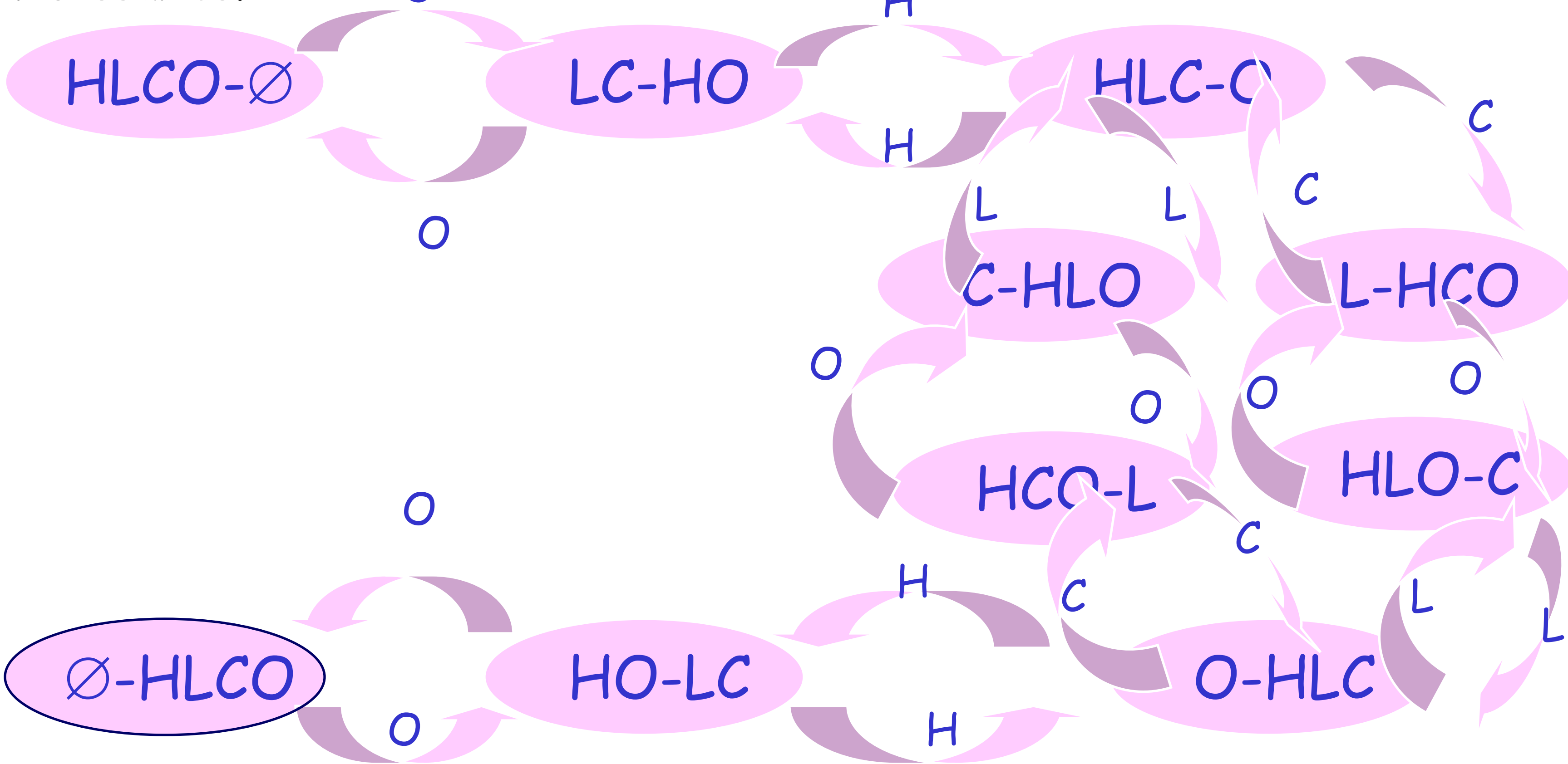
- Na computação, um AF é um modelo útil para projetar vários tipos de sistemas:
  - Busca de cadeias em editores de textos. No Word, por exemplo, podemos expressar as cadeias com os caracteres curinga * e outros especiais.

Exemplos

- Analisadores léxicos (AL) de compiladores. O AL é a interface entre o programa fonte e o resto do compilador. Ele é responsável por:
  - "empacotar" os caracteres do programa e lhes dar um rótulo que será usado pelo analisador sintático montar a árvore sintática.
  - Os rótulos são: identificadores, os nomes dos símbolos simples (<, =, [,), etc.), dos compostos (:= , <>, <=, etc.), números inteiros, números reais, cadeias de caracteres, o nome das palavras-chaves.
  - Eliminar caracteres brancos e comentários e, se for pedido, reeditar o texto fonte acrescentando número de linhas, indentação, etc.
  - Reconhecer alguns erros léxicos como má-formação de inteiros, de reais, de cadeias de caracteres, comentário que não fecha, caracteres não reconhecidos pela linguagem.

- Problemas de IA →
  - Descrição do Problema: um homem (H) com uma couve (C), um lobo (L) e uma ovelha (O) estão na margem esquerda de um rio. Existe um barco com 2 lugares para carregar o homem com um dos outros três.
  - Se o H deixa a O com a C ela a come ou o L com a O ele a come.
  - É possível os quatro atravessarem o rio sem a ovelha ou a couve serem comidas?
  - O problema pode ser modelado analisando os ocupantes da margem esquerda e direita a cada travessia. Cada um é um estado menos os fatais (OC – HL, por exemplo).

- Entradas: ações (transições) que o H toma
  - » Atravessar sozinho (H)
  - » Com o lobo (L)
  - » Com a couve (C)
  - » Com a ovelha (O)
- Estado Inicial: HLCO - ∅
- Estado Final (duplamente circulado): ∅ - HLCO
- Existem 2 soluções curtas e inúmeras outras envolvendo caminhos desnecessários.



- O sistema é atípico pois:
  - Nele existe só um estado final MAS podem existir vários
  - Para cada transição existe uma reversa, MAS isto não é o caso geral
  - Depois do estado final não existe computação, MAS pode existir

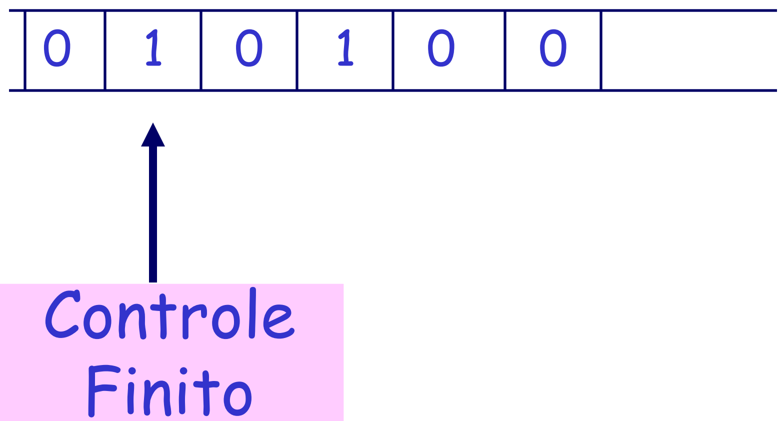
Definição formal de um AF Determinístico

- Um AF Determinístico (AFD) é denotado formalmente por uma quíntupla $(Q, \Sigma, \delta, qo, F)$ onde:

- Q é o conjunto de estados
- Σ é um alfabeto finito
- $qo \in Q$ é o símbolo inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de símbolos finais
- δ (delta) é a função de transição de estados mapeando $Q \times \Sigma \rightarrow Q$.
- $\delta(q,a)$ é um estado para cada estado q e entrada a

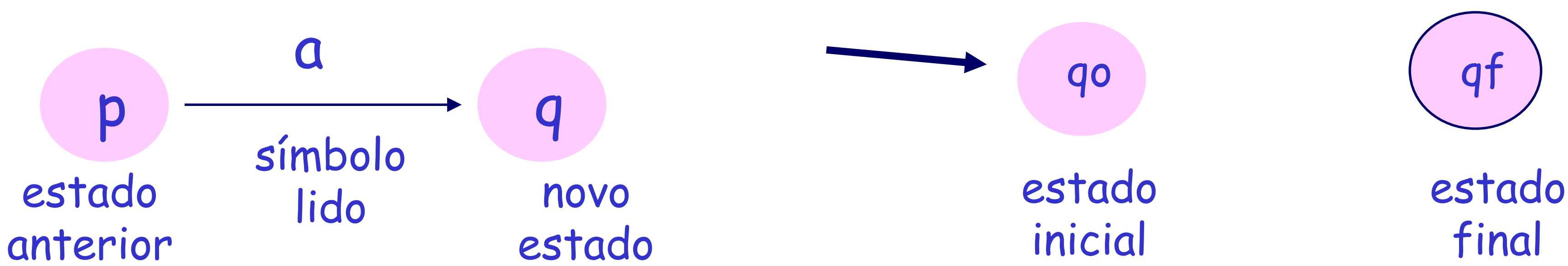
Esquema da Máquina e Representação usando grafos

Esquema:



Fita com a seqüência

de símbolos de Σ



Aceitando cadeias – função de transição estendida

Estendemos a função de transição para aceitar cadeias:

δ': Q X $\Sigma^* \rightarrow$ Q

$\delta'(q,w)$ é um estado p que o AF vai estar depois de ler a cadeia w, começando do estado q. Isto é, existe um caminho no diagrama de transições de q para p denominado w

Definimos:

1) $\delta'(q,\lambda) = q$

(sem ler um símbolo de entrada o AF não pode mudar de estado)

2) $\delta'(q,wa) = \delta(\delta'(q,w),a)$ para a como símbolo de entrada e w como cadeia de entrada

(Diz como achar o estado depois de ler uma cadeia de entrada wa não vazia. Isto é, encontre o estado $p = \delta'(q,w)$ depois de ler w. Então calcule $\delta(p,a)$)

Usaremos δ no lugar de δ' pois $\delta(q,a) = \delta(\delta'(q, \lambda),a) = \delta'(q,a)$

Linguagem aceita por um AF M

- Uma cadeia x é dita ser aceita pelo AFD M = $(Q, \Sigma, \delta, qo, F)$ se $\delta(qo,x) = p$ para algum $p \in F$.

Ou

- $L(M) = \{x \mid \delta(qo,x) \in F\}$

- Def 1: Uma linguagem aceita por um AFD é uma linguagem regular (ou do tipo 3)

- Def 2: Dois AF M1 e M2 são equivalentes se $L(M1) = L(M2)$

Exercício

Fazer um AFD M que aceita L(M) = {w | w possui um nro par de 0´s e de 1´s }

Exemplos de cadeias da linguagem:

Lambda

00

11

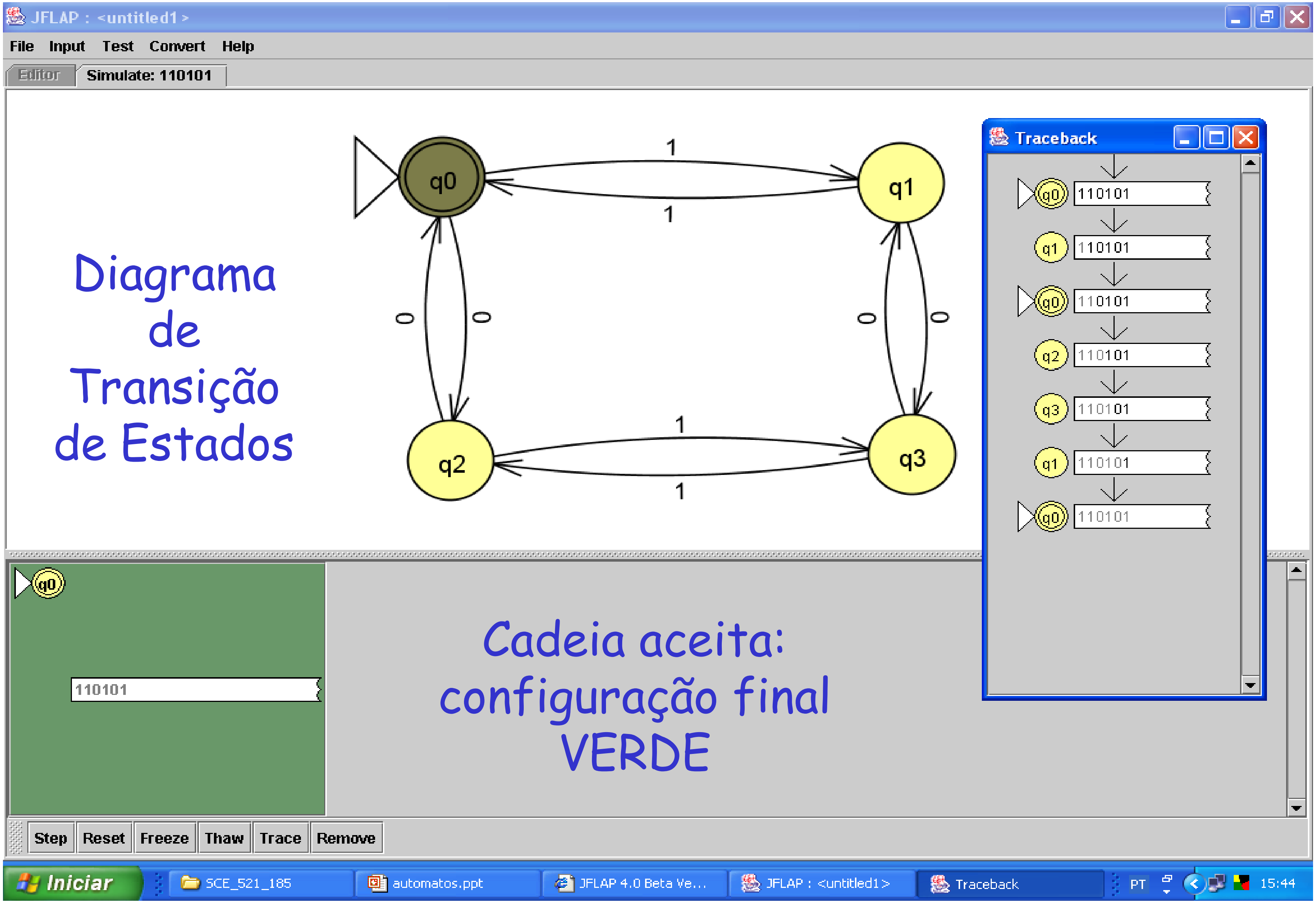
1010

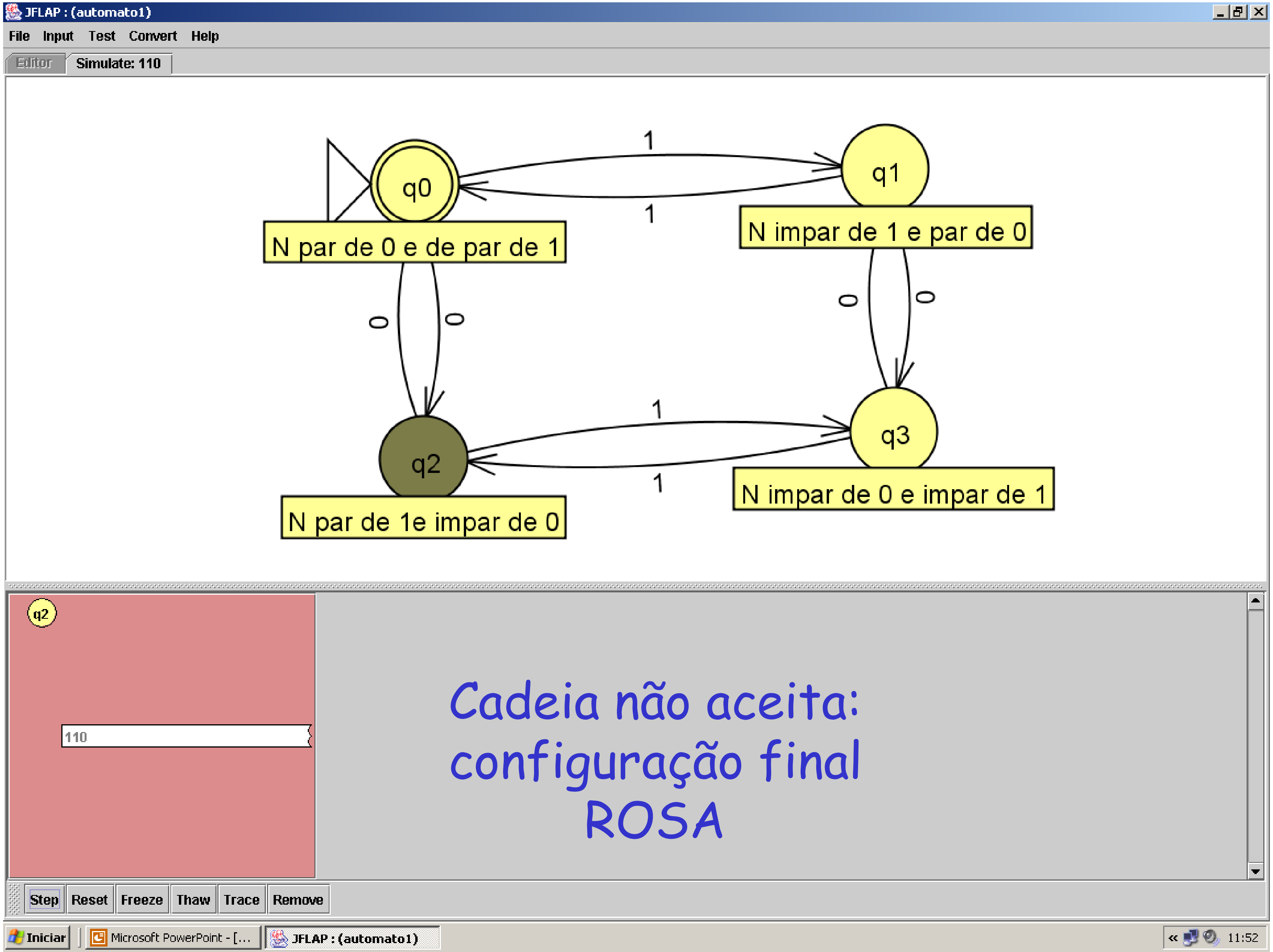
0101

...

Exemplo 1

Fazer um AFD M que aceita L(M) = {w | w possui um nro par de 0´s e de 1´s }




JFLAP : (automato1)
File Input Test Convert Help
Editor
Simulate: 110
1
1
q0
q1
N par de 0 e de par de 1
N impar de 1 e par de 0
0
0
0
0
1
1
q2
q3
N impar de 0 e impar de 1
N par de 1e impar de 0
q2
110
Cadeia não aceita:
configuração final
ROSA
Step Reset Freeze Thaw Trace Remove
Iniciar
Microsoft PowerPoint - [...
JFLAP : (automato1)
11:52

Reconhecimento de 110101

$\delta(qo,1) = q1$ e $\delta(q1,1) = qo$

Assim: $\delta(qo,11) = \delta(\delta(qo,1),1) = \delta(q1,1) = qo \ldots \delta(qo,110101) = qo$

Portanto 110101 está na L(M)

$$M = (\{qo,q1,q2,q3\}, \{0,1\}, \delta, qo, \{qo\})$$

δ :

estados	entradas 0	1
qo	q2	q1
q1	q3	q0
q2	q0	q3
q3	q1	q2

Tabela de Transição de Estados

Função de Transição de Estados

$\delta(qo,0) = q2$ $\delta(qo,1) = q1$

$\delta(q1,0) = q3$ $\delta(q1,1) = q0$

$\delta(q2,0) = q0$ $\delta(q2,1) = q3$

$\delta(q3,0) = q1$ $\delta(q3,1) = q2$

Como projetar um AF?

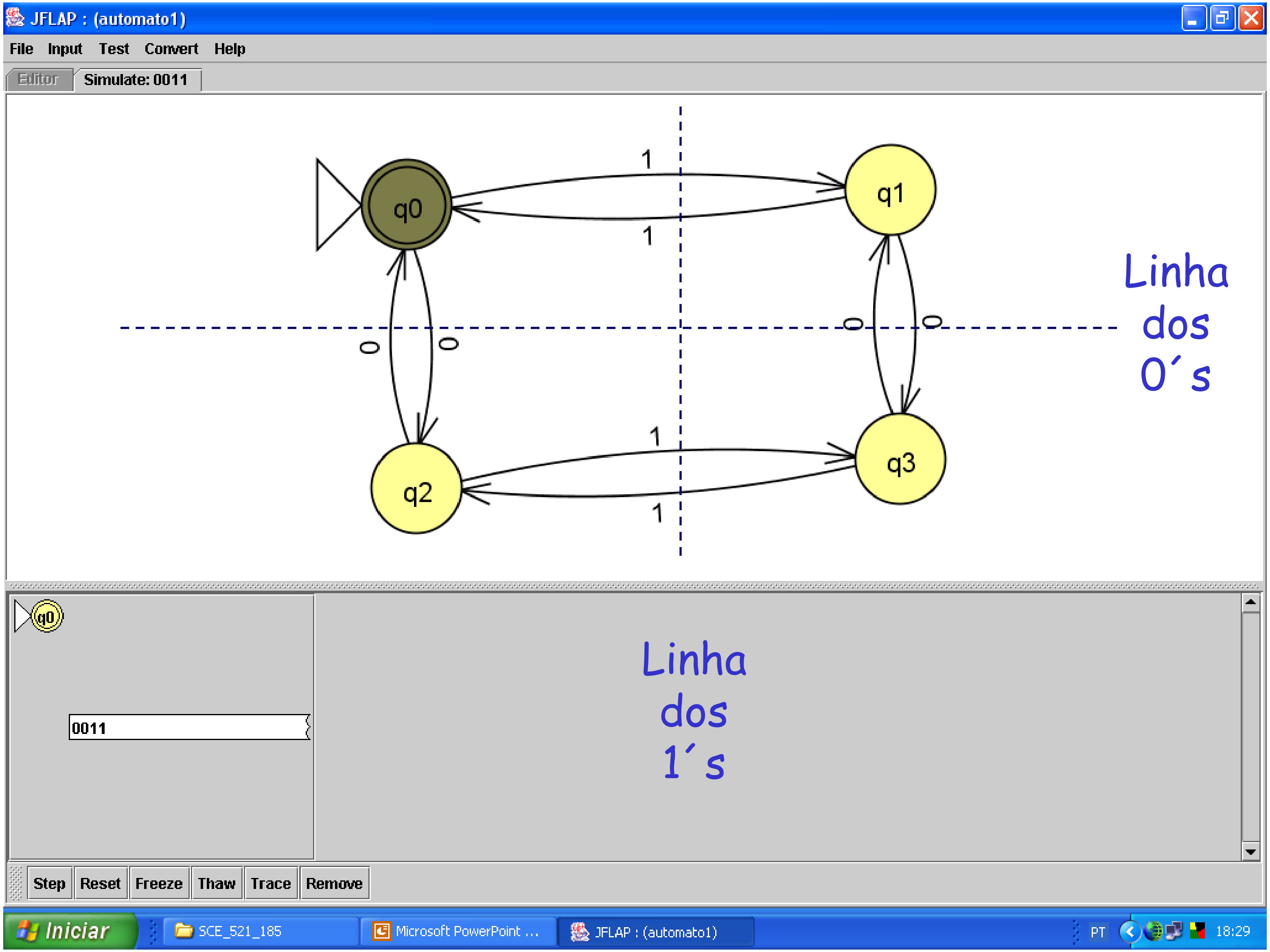
Tendo somente uma memória finita,

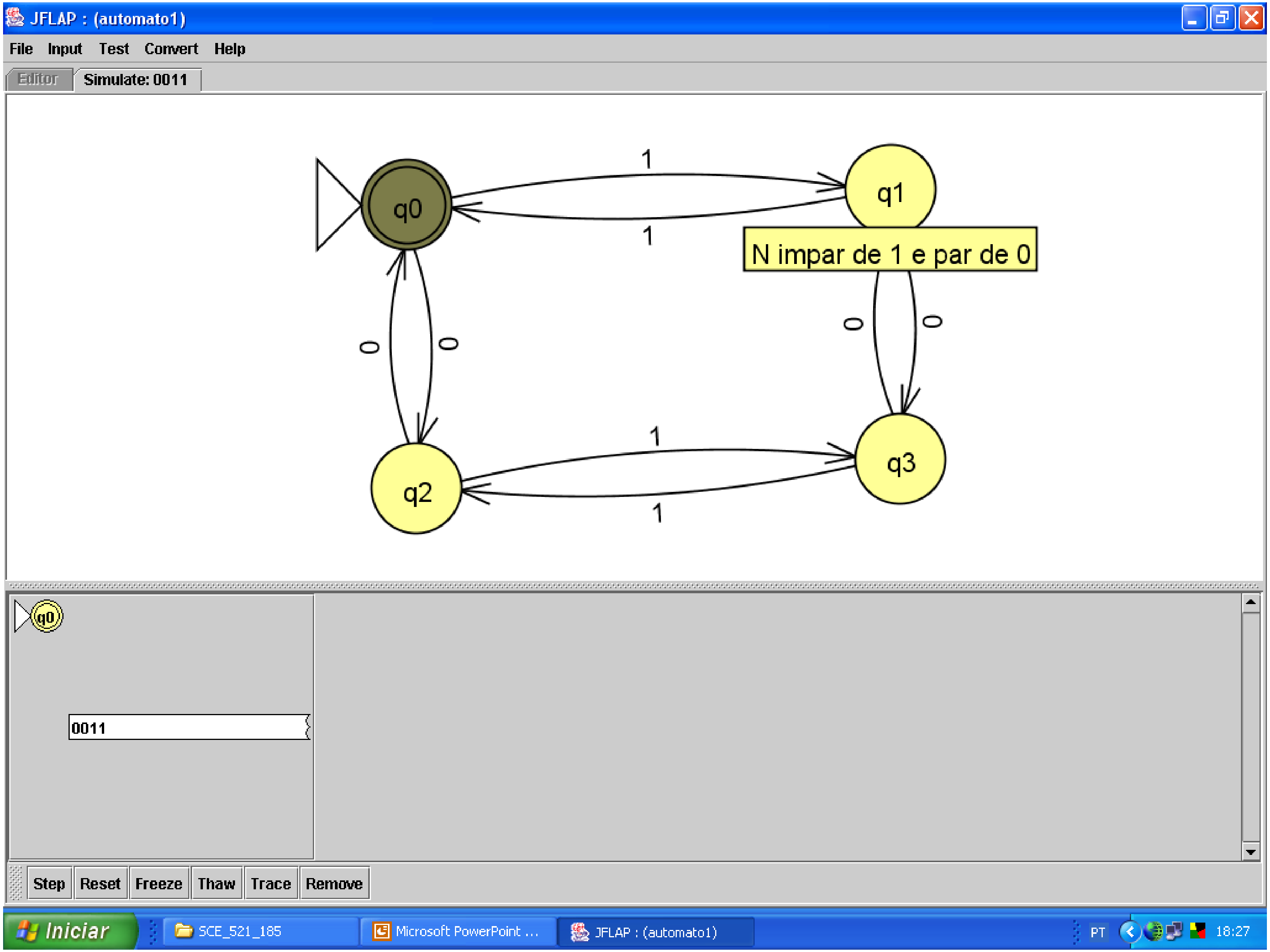
só podemos lembrar as informações importantes e associá-las aos estados

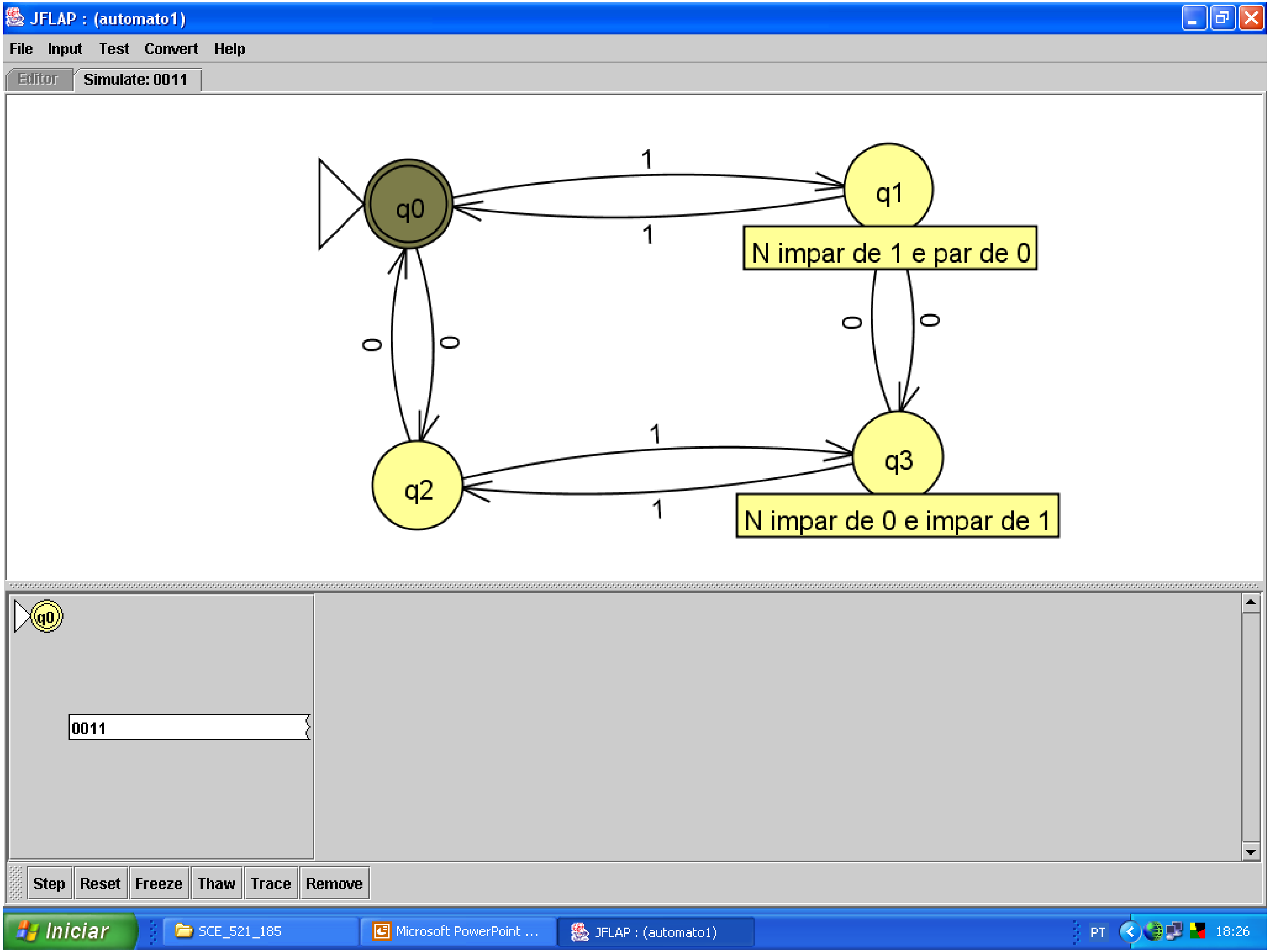
Usamos os estados para armazenar a paridade dos números

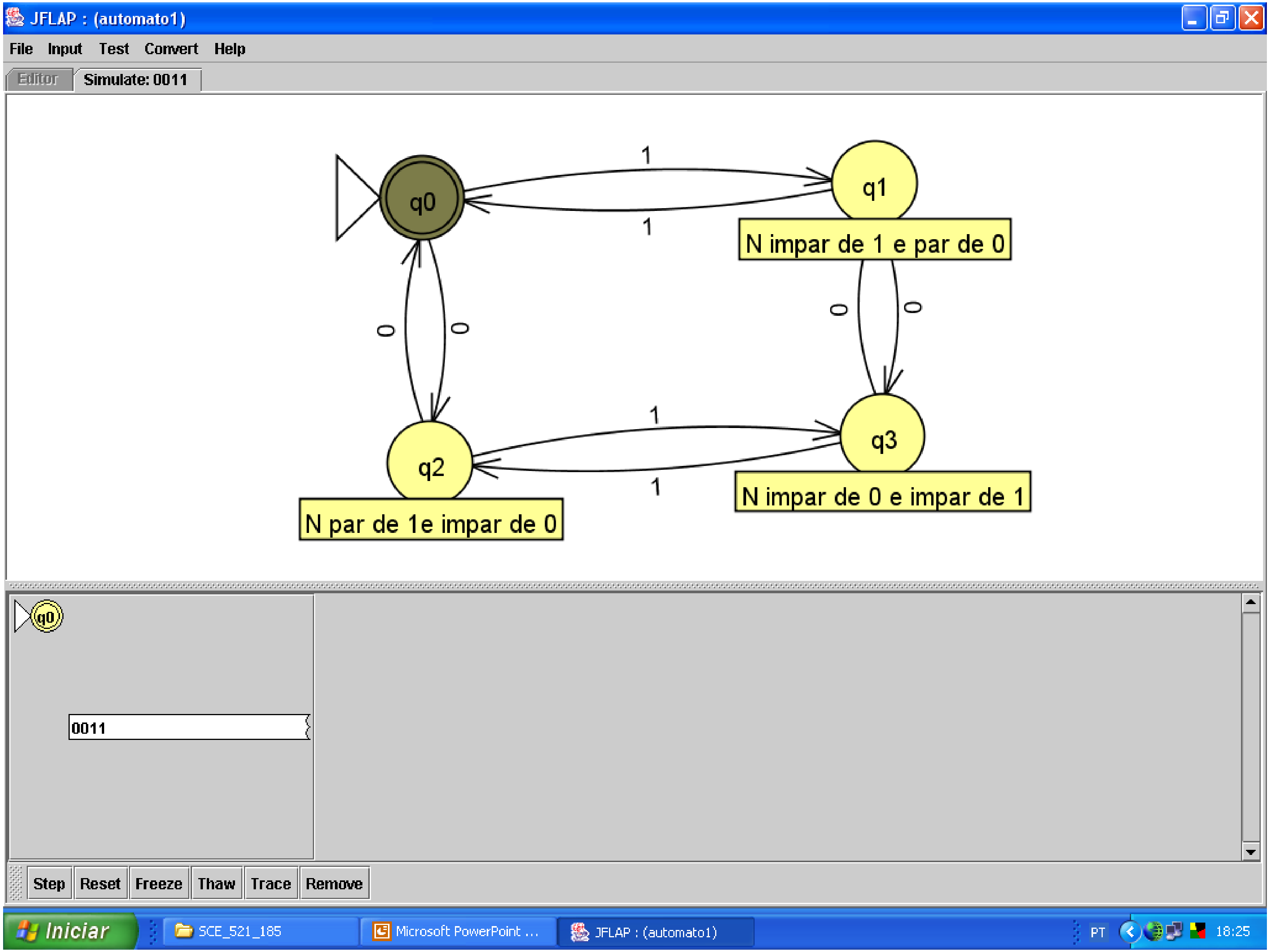
e não

os números o que exigiria um número infinito de estados (memória infinita).

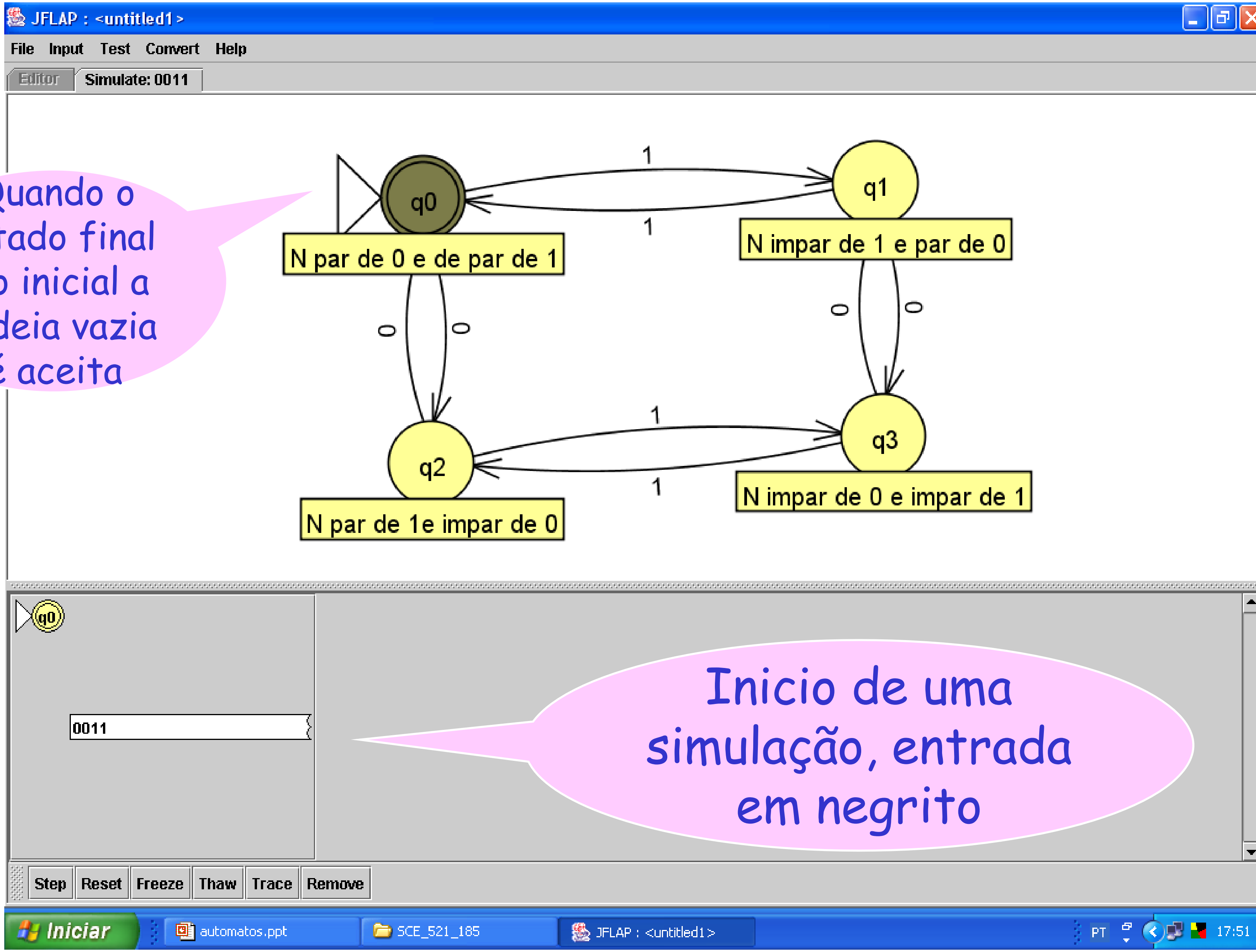



JFLAP : (automato1)
File Input Test Convert Help
Editor
Simulate: 0011
q0
q1
q2
q3
1
1
1
1
0
0
0
0
N impar de 1 e par de 0
q0
0011
Step Reset Freeze Thaw Trace Remove
Iniciar
SCE_521_185
Microsoft PowerPoint ...
JFLAP : (automato1)
PT
18:27


JFLAP : (automato1)
File Input Test Convert Help
Editor Simulate: 0011
q0
q1
q2
q3
1
1
0
0
0
0
1
1
N impar de 1 e par de 0
N impar de 0 e impar de 1
q0
0011
Step Reset Freeze Thaw Trace Remove
Iniciar
SCE_521_185
Microsoft PowerPoint ...
JFLAP : (automato1)
PT
18:26


JFLAP : (automato1)
File Input Test Convert Help
Editor Simulate: 0011
q0
q1
q2
q3
1
1
1
1
0
0
0
0
N impar de 1 e par de 0
N par de 1e impar de 0
N impar de 0 e impar de 1
q0
0011
Step Reset Freeze Thaw Trace Remove
Iniciar
SCE_521_185
Microsoft PowerPoint ...
JFLAP : (automato1)
PT
18:25

Quando o estado final é o inicial a cadeia vazia é aceita

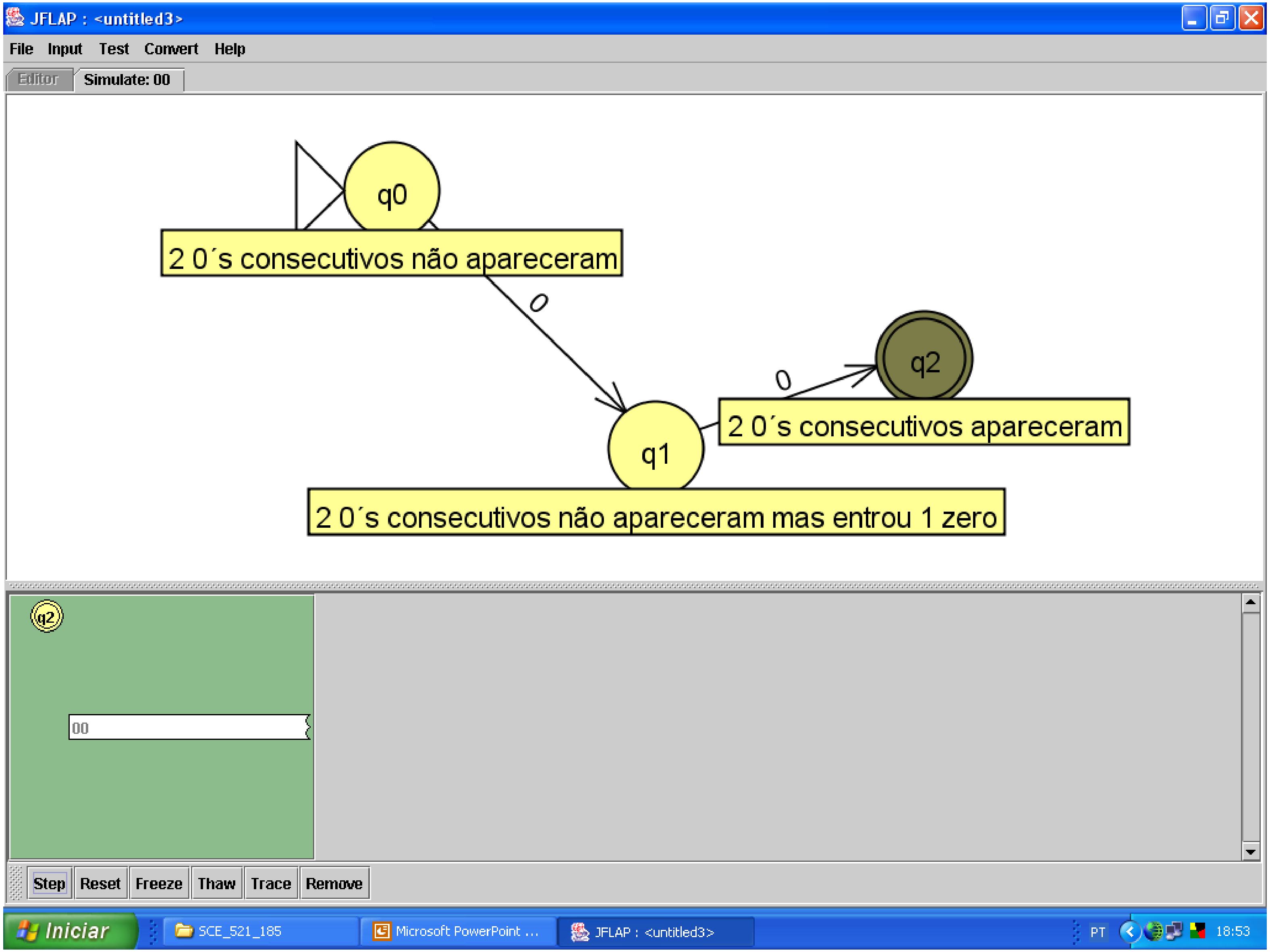


Inicio de uma simulação, entrada em negrito

Exemplo 2

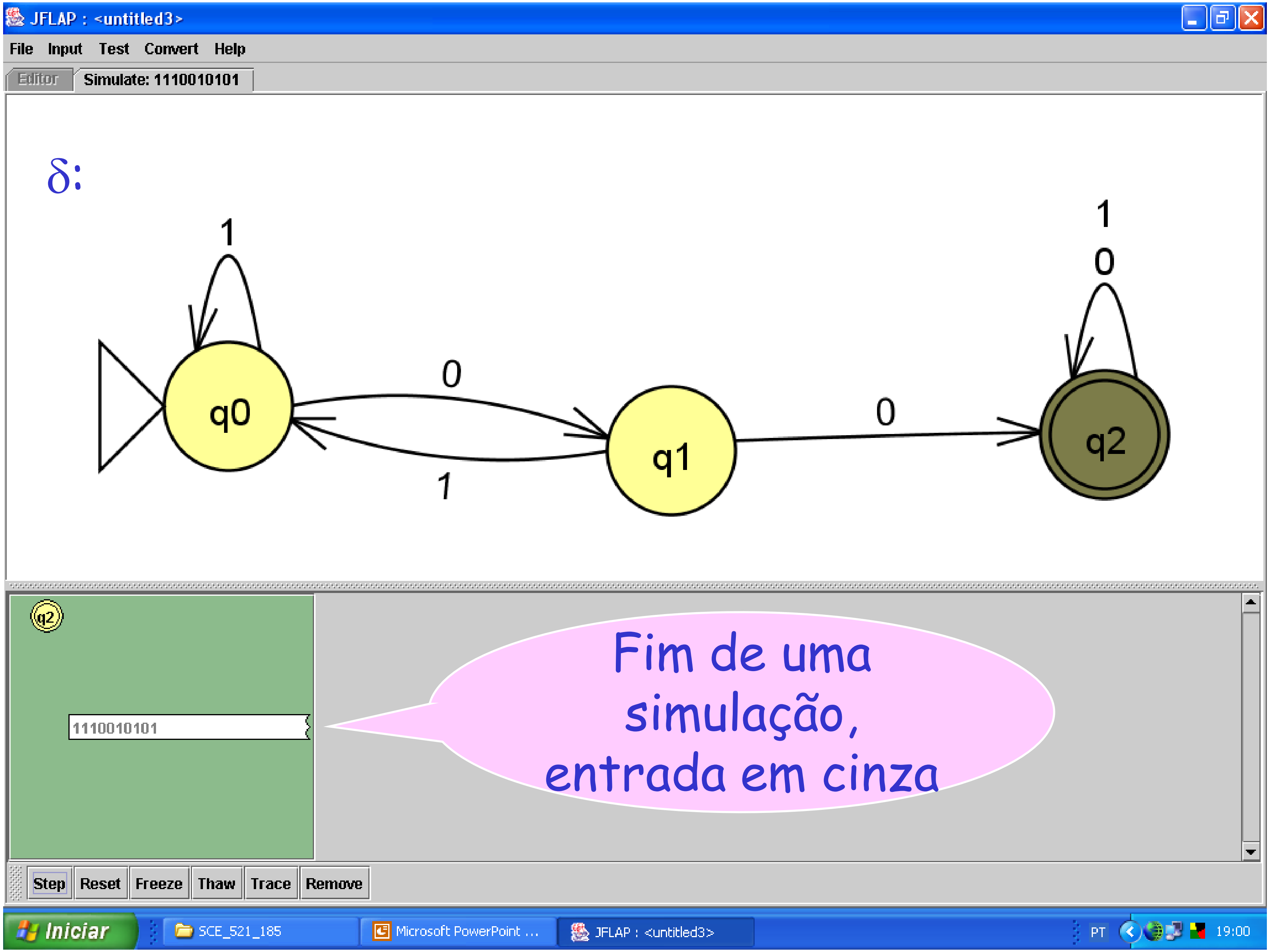
Fazer um AFD M que aceita
L(M) = {w $\in$ {0,1}* |w possua pelo menos dois 0´s consecutivos}

Garantindo a restrição...



Completando o AFD M e reconhecendo uma cadeia de L(M)

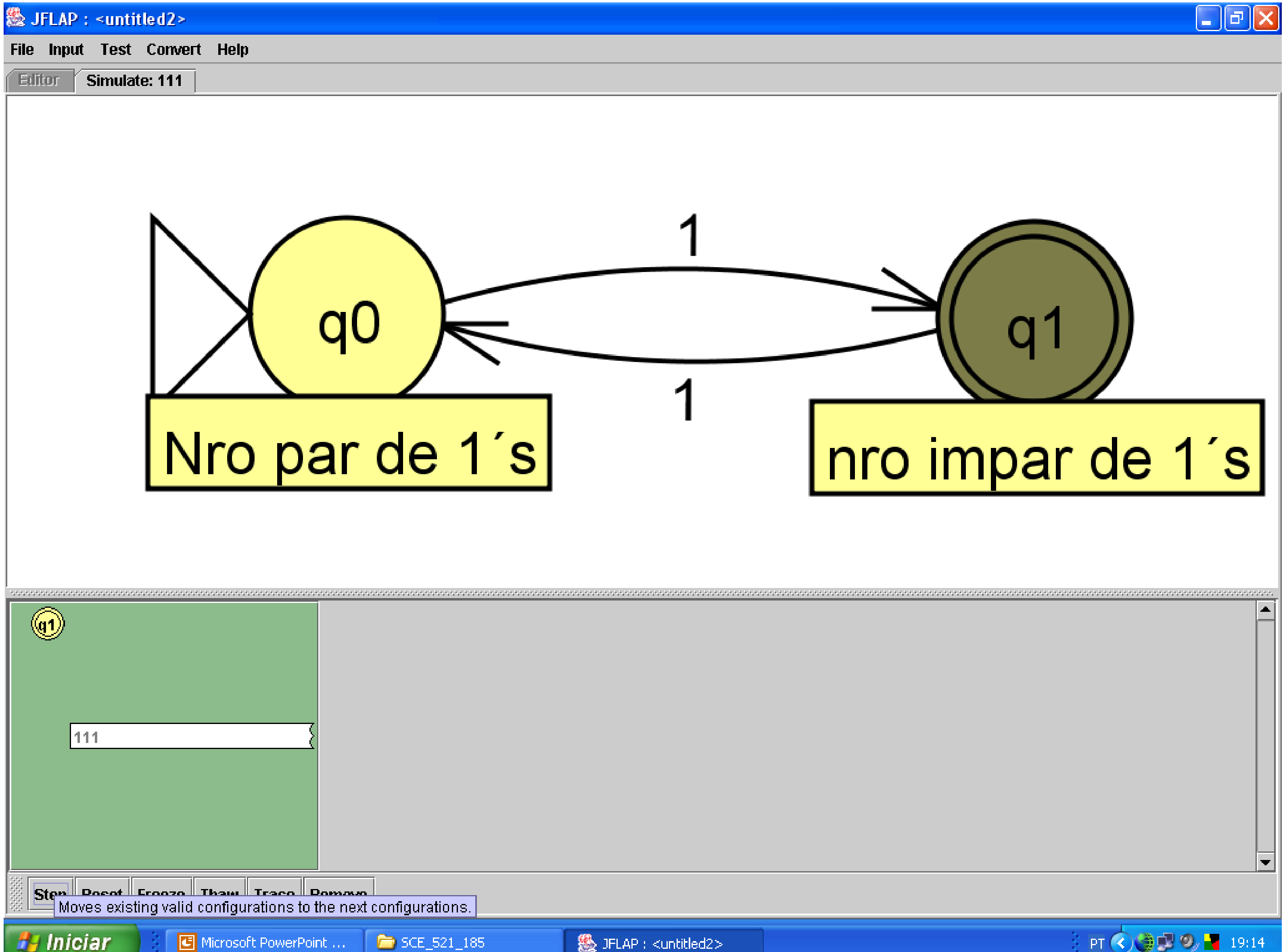
$$M = (\{q0,q1,q2\}, \{0,1\}, \delta, q0,\{q2\})$$



Exemplo 3

Fazer um AFD M que aceita L(M) = {w $\in$ {0,1}* |w possua um número impar de 1´s}

Garantindo a restrição...



Completando o AFD M e reconhecendo uma cadeia de L(M)

$$M = (\{q0,q1\}, \{0,1\}, \delta, q0,\{q1\})$$