$10^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - 26/05/2011

1. Seja $a_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $b_n, n \in \mathbb{N}$, duas sequências numéricas dadas. Suponha que a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

convirja uniformemente em $[-\pi, \pi]$. Seja

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

Prove que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Determine a série de Fourier da função dada e verifique que a série obtida converge uniformemente em $\mathbb{R}$ (use o teste M de Weierstrass).

   (a) $f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

   (b) $f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi$

   (c)

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

3. Seja f definida e de classe C^2 em $[-\pi, \pi]$. Para cada natural $n \geq 1$ seja

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

   (a) Verifique que, para todo natural $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2} \left([f'(\pi) - f'(-\pi)] \cos n\pi - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx dx \right)$$

   (b) Use o teste M de Weierstrass para provar que a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

   'e uniformemente convergente.

4. Seja f definida e de classe C^2 em $[-\pi,\pi]$ e tal que $f(-\pi)=f(\pi)$. Use o teste M de Weierstrass para provar que a série de Fourier de f converge uniformemente, em $\mathbb{R}$, para a função

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

onde os a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f.

5. Seja $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

onde o segundo membro é a série de Fourier de $f(x)=x^2$, $-\pi\leq x\leq\pi$.

   (a) Prove que F é continua.

   (b) Verifique que F é periódica de período 2π.

   (c) Esboce o gráfico de F.

6. Seja $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

onde o segundo membro é a série de Fourier de $f(x)=x^5-\pi^4x$, $-\pi\leq x\leq\pi$.

   (a) Prove que F é continua.

   (b) Prove que para todo $x\in\mathbb{R}$

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\cos nx$$

   (c) Esboce o gráfico de F.

7. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi\leq x<0\\ x, & 0\leq x\leq\pi\end{cases}$ e $f(x+2\pi)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

   (a) Encontre a série de Fourier associada a função f.

   (b) A série de Fourier associada a função f converge? Caso afirmativo diga para quem ela converge justificando sua resposta.

8. Dado ω um número real não inteiro, considere a função $f(x)=\operatorname{sen}(\omega x)$ definida em $[0,\frac{\pi}{\omega}]$.

   (a) Escreva $f(x)$ em uma série de Fourier em cossenos no intervalo $[0,\frac{\pi}{\omega}]$.

   (b) Discuta a convergência da série de Fourier encontrada.

9. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periódica de período 2π, dada por $f(x)=\pi-|x|$ para $x\in[-\pi,\pi]$.

   (a) Esboce o gráfico de f.

(b) Determine a série de Fourier de f.

(c) Discuta a convergência da série encontrada no item anterior.

10. Desenvolver a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

no intervalo $]0, \pi[$:

(a) Em uma série de senos.

(b) Em uma série de cossenos.

11. Esboce o gráfico de $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathbf{F}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L})$$

onde a série acima é a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período $2L$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1 + \frac{x}{L}) & \text{se } -L \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{L}) & \text{se } 0 < x \leq L \end{cases}$$