Análise de algoritmos

Parte II

Análise de algoritmos

- Existem basicamente 2 formas de estimar o tempo de execução de programas e decidir quais são os melhores
  - Empírica ou teoricamente

- É desejável e possível estimar qual o melhor algoritmo sem ter que executá-los
  - Função da análise de algoritmos

Calculando o tempo de execução

- Supondo que as operações simples demoram uma unidade de tempo para executar, considere o programa abaixo para calcular o resultado de $\sum_{i=1}^{n} i^3$

<u>Início</u>

declare soma_parcial numérico;

soma_parcial ← 0;

para i←1 até n faça

    soma_parcial←soma_parcial+i*i*i;

escreva(soma_parcial);

<u>Fim</u>

Calculando o tempo de execução

- Supondo que as operações simples demoram uma unidade de tempo para executar, considere o programa abaixo para calcular o resultado de $\sum_{i=1}^{n} i^3$

Início

declare soma_parcial numérico;

soma_parcial ← 0;

para i←1 até n faça

    soma_parcial←soma_parcial+i*i*i;

escreva(soma_parcial);

Fim

1 unidade de tempo

1 unidade para inicialização de i, n+1 unidades para testar se i≤n e n unidades para incrementar i = 2n+2

4 unidades (1 da soma, 2 das multiplicações e 1 da atribuição) executada n vezes (pelo comando "para") = 4n unidades

1 unidade para escrita

Calculando o tempo de execução

- Supondo que as operações simples demoram uma unidade de tempo para executar, considere o programa abaixo para calcular o resultado de $\sum_{i=1}^{n} i^3$

<u>Início</u>

declare soma_parcial numérico;

soma_parcial ← 0;

para i←1 até n faça

parcial+i*i*i;

1 unidade de tempo

1 unidade para inicialização de i, n+1 unidades para testar se i≤n e n unidades para incrementar i = 2n+2

4 unidades (1 da soma, 2 das multiplicações e 1 da atribuição) executada n vezes (pelo comando “para”) = 4n unidades

1 unidade para escrita

Custo total: somando tudo, tem-se 6n+4 unidades de tempo, ou seja, a função é **O(n)**

Calculando o tempo de execução

- Ter que realizar todos esses passos para cada algoritmo (principalmente algoritmos grandes) pode se tornar uma tarefa cansativa

- Em geral, como se dá a resposta em termos do *big-oh*, costuma-se desconsiderar as constantes e elementos menores dos cálculos
  - No exemplo anterior
    - A linha soma_parcial←0 é insignificante em termos de tempo
    - É desnecessário ficar contando 2, 3 ou 4 unidades de tempo na linha soma_parcial←soma_parcial+i*i*i
    - O que realmente dá a grandeza de tempo desejada é a repetição na linha para i←1 até n faça

Regras para o cálculo

- Repetições
  - O tempo de execução de uma repetição é pelo menos o tempo dos comandos dentro da repetição (incluindo testes) vezes o número de vezes que é executada

Regras para o cálculo

- Repetições aninhadas
  - A análise é feita de dentro para fora
  - O tempo total de comandos dentro de um grupo de repetições aninhadas é o tempo de execução dos comandos multiplicado pelo produto do tamanho de todas as repetições
  - O exemplo abaixo é $O(n^2)$

```
para i←0 até n faça
    para j←0 até n faça
            faça k←k+1;
```

Regras para o cálculo

- Comandos consecutivos

  - É a soma dos tempos de cada um, o que pode significar o máximo entre eles

  - O exemplo abaixo é $O(n^2)$, apesar da primeira repetição ser $O(n)$

```
para i←0 até n faça
    k←0;
para i←0 até n faça
    para j←0 até n faça
            faça k←k+1;
```

Regras para o cálculo

- Se... então... senão
  - Para uma cláusula condicional, o tempo de execução nunca é maior do que o tempo do teste mais o tempo do maior entre os comandos relativos ao <u>então</u> e os comandos relativos ao <u>senão</u>
  - O exemplo abaixo é O(n)

```
se i<j
   então i←i+1
   senão para k←1 até n faça
                  i←i*k;
```

Regras para o cálculo

- Chamadas a sub-rotinas
  - Uma sub-rotina deve ser analisada primeiro e depois ter suas unidades de tempo incorporadas ao programa/sub-rotina que a chamou

Exercício

- Estime quantas unidades de tempo são necessárias para rodar o algoritmo abaixo

```
Início
declare i e j numéricos;
declare A vetor numérico de n posições;
i←1;
enquanto i≤n faça
    A[i]←0;
    i←i+1;
para i←1 até n faça
    para j←1 até n faça
        A[i]←A[i]+i+j;
Fim
```

Exercício em <u>duplas</u>

- Analise a sub-rotina recursiva abaixo

```
sub-rotina fatorial(n: numérico)
início
    declare aux numérico;
    se n≤1
      então aux←1
      senão aux←n*fatorial(n-1);
    fatorial←aux;
fim
```

Regras para o cálculo

- Sub-rotinas recursivas
  - Se a recursão é um “disfarce” da repetição (e, portanto, a recursão está mal empregada, em geral), basta analisá-la como tal
  - O exemplo anterior é obviamente O(n)

```
sub-rotina fatorial(n: numérico)
início
declare aux numérico;
se n≤1
        então aux←1
        senão aux←n*fatorial(n-1);
fatorial←aux;
fim
```

Eliminando a recursão

```
sub-rotina fatorial(n: numérico)
início
declare aux numérico;
aux←1;
enquanto n>1 faça
        aux←aux*n;
        n←n-1;
fatorial←aux;
fim
```

Regras para o cálculo

- Sub-rotinas recursivas
  - Em muitos casos (incluindo casos em que a recursividade é bem empregada), é difícil transformá-la em repetição
    - Nesses casos, para fazer a análise do algoritmo, pode ser necessário fazer uma análise de recorrência
    - *Recorrência: equação ou desigualdade que descreve uma função em termos de seu valor em entradas menores*
      - Caso típico: algoritmos de **dividir-e-conquista**r, ou seja, algoritmos que desmembram o problema em vários subproblemas que são semelhantes ao problema original, mas menores em tamanho, resolvem os subproblemas recursivamente e depois combinam essas soluções com o objetivo de criar uma solução para o problema original
        - Exemplos?

Regras para o cálculo

- Exemplo de uso de recorrência
  - Números de Fibonacci
    - 0,1,1,2,3,5,8,13...
    - f(0)=0, f(1)=1, f(i)=f(i-1)+f(i-2)

```
sub-rotina fib(n: numérico)
início
declare aux numérico;
se n≤1
    então aux←1
    senão aux←fib(n-1)+fib(n-2);
fib←aux;
fim
```

Regras para o cálculo

- Exemplo de uso de recorrência
  - Números de Fibonacci
    - 0,1,1,2,3,5,8,13...
    - f(0)=0, f(1)=1, f(i)=f(i-1)+f(i-2)

```
sub-rotina fib(n: numérico)
início
declare aux numérico;
se n≤1
    então aux←1
    senão aux←fib(n-1)+fib(n-2);
fib←aux;
fim
```

Seja T(n) o tempo de execução da função.

Caso 1:
Se n=0 ou 1, o tempo de execução é constante, que é o tempo de testar o valor de n no comando **se**, mais atribuir o valor 1 à variável aux, mais atribuir o valor de aux ao nome da função; ou seja, **T(0)=T(1)=3.**

Regras para o cálculo

- Exemplo de uso de recorrência
  - Números de Fibonacci
    - 0,1,1,2,3,5,8,13...
    - f(0)=0, f(1)=1, f(i)=f(i-1)+f(i-2)

```
sub-rotina fib(n: numérico)
início
declare aux numérico;
se n≤1
    então aux←1
    senão aux←fib(n-1)+fib(n-2);
fib←aux;
fim
```

Caso 2:
Se n>1, o tempo consiste em testar o valor de n no comando **se**, mais o trabalho a ser executado no **senão** (que é uma soma, uma atribuição e 2 chamadas recursivas), mais a atribuição de aux ao nome da função; ou seja, a recorrência **T(n)=T(n-1)+T(n-2)+4**, para n>1.

Regras para o cálculo

- Muitas vezes, a recorrência pode ser resolvida com base na <u>prática</u> e <u>experiência</u> do analista

- Alguns métodos para resolver recorrências
  - Método da substituição
  - Método mestre
  - Método da árvore de recursão

Resolução de recorrências

- Método da substituição
  - Supõe-se (aleatoriamente ou com base na experiência) um limite superior para a função e verifica-se se ela não extrapola este limite
    - Uso de indução matemática
  - O nome do método vem da “substituição” da resposta adequada pelo palpite
  - Pode-se “apertar” o palpite para achar funções mais exatas

Resolução de recorrências

- Método mestre
  - Fornece limites para recorrências da forma $T(n)=aT(n/b)+f(n)$, em que $a\geq1$, $b>1$ e $f(n)$ é uma função dada
  - Envolve a memorização de alguns casos básicos que podem ser aplicados para muitas recorrências simples

Resolução de recorrências

- Método da árvore de recursão
  - Traça-se uma árvore que, nível a nível, representa as recursões sendo chamadas
  - Em seguida, em cada nível/nó da árvore, são acumulados os tempos necessários para o processamento
    - No final, tem-se a estimativa de tempo do problema
  - Este método pode ser utilizado para se fazer uma suposição mais informada no método da substituição

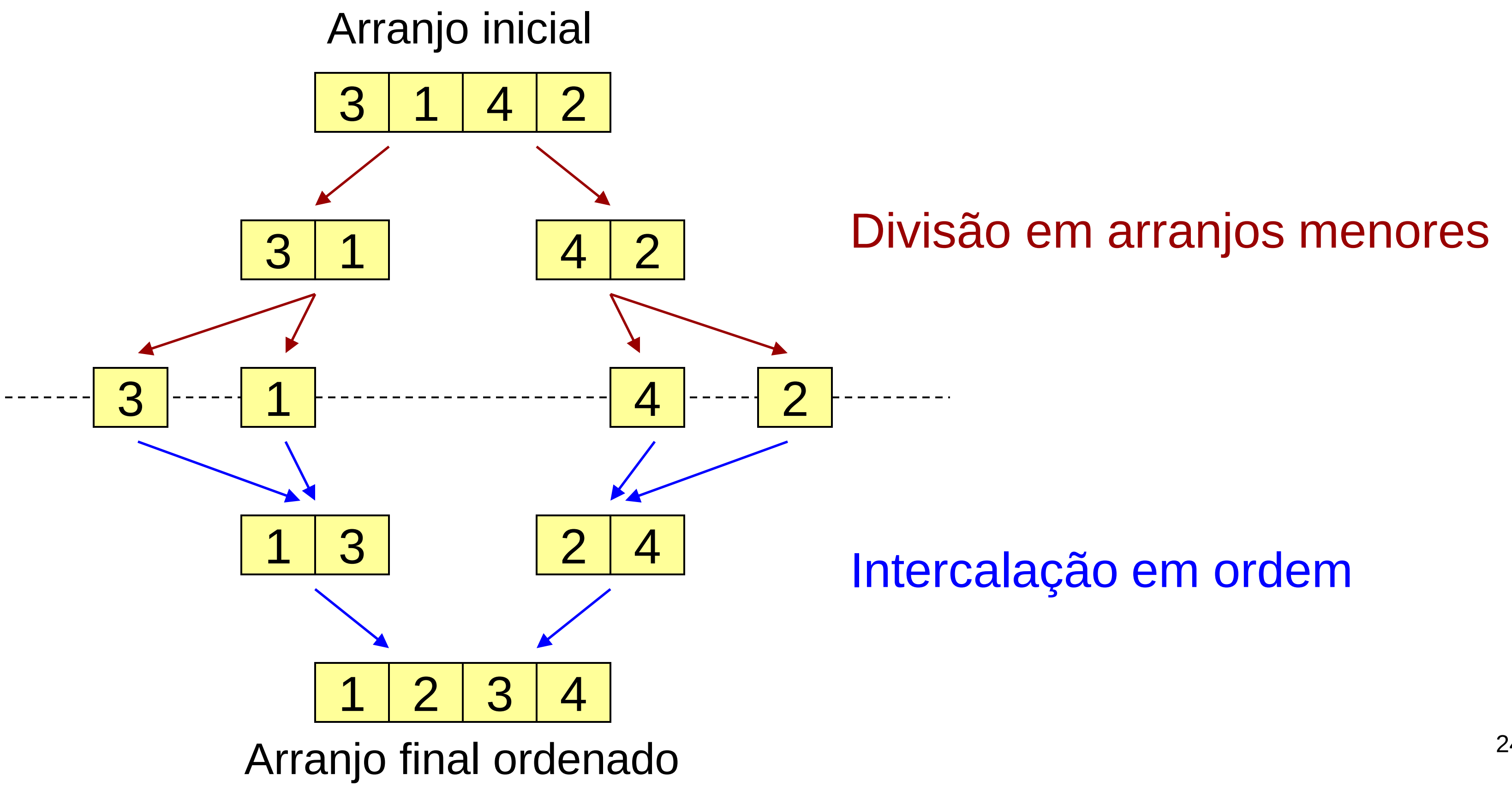
Resolução de recorrências

- Método da árvore de recursão

  - Exemplo: algoritmo de ordenação de arranjos por intercalação
    - Passo 1: divide-se um arranjo não ordenado em dois subarranjos
    - Passo 2: se os subarranjos não são unitários, cada subarranjo é submetido ao passo 1 anterior; caso contrário, eles são ordenados por intercalação dos elementos e isso é propagado para os subarranjos anteriores

Ordenação por intercalação

- Exemplo com arranjo de 4 elementos



Resolução de recorrências

- Método da árvore de recursão
  - Considere o tempo do algoritmo (que envolve recorrência)

$T(n)=c$, se $n=1$

$T(n)=2T(n/2)+cn$, se $n>1$

n operações para a intercalação do passo final

$T(n)=2(2T(n/4)+cn/2)+cn$

$=4T(n/4)+2(cn/2)+cn$

$= 4(2T(n/8)+4(cn/4))+2(cn/2) + cn$

$= 8T(n/8)+ 3cn$

...

$= 2^iT(n/2^i) + i(cn)$

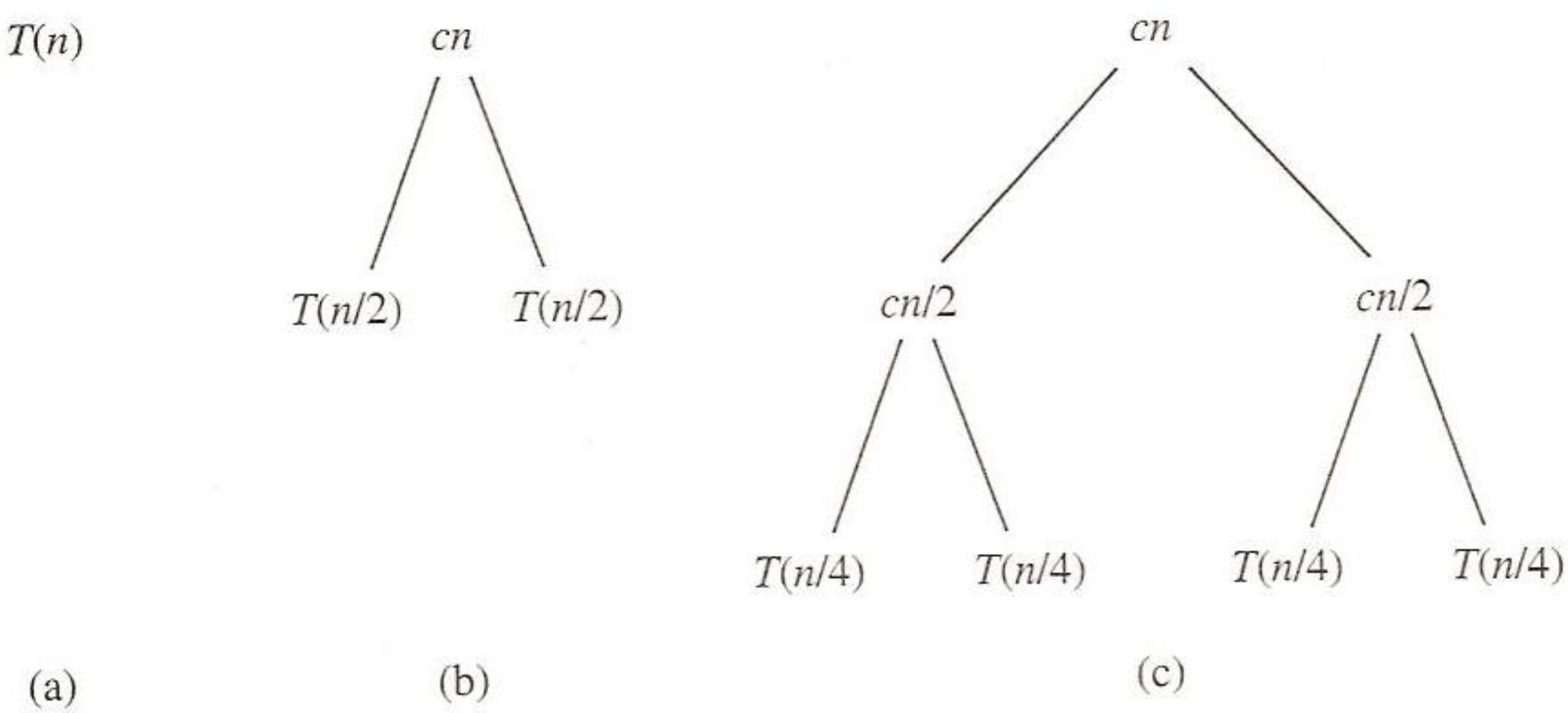
Considerando o limite $n/2^i = 1$, logo $i = \log_2 n$, e

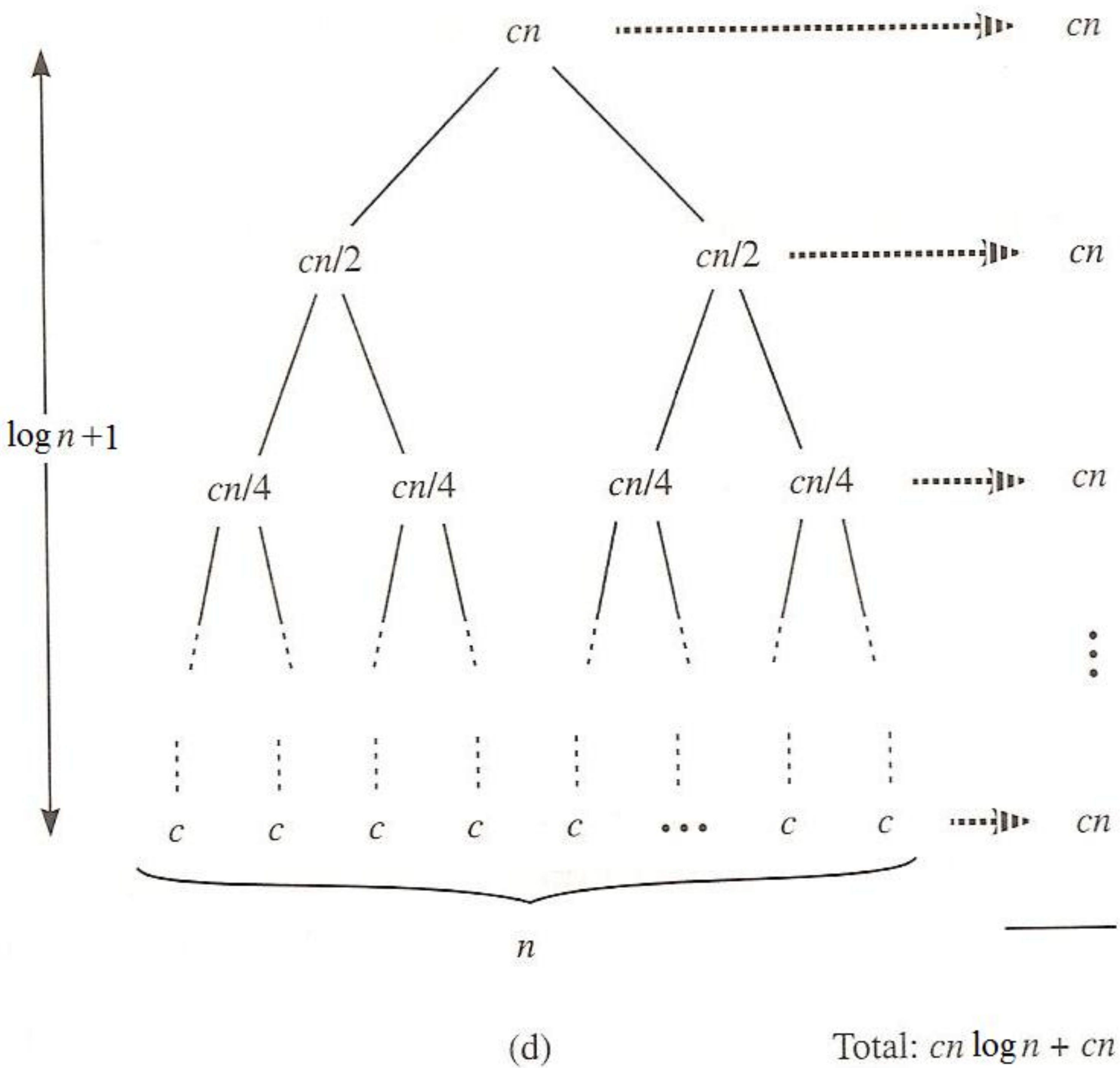
$T(n) = 2^{\log_2 n}T(1) + \log_2 n(cn)$

$= cn + cn \log_2 n$

$= cn \log_2 n + cn$

Resolução de recorrências





cn
cn
cn/2
cn/2
cn
log n +1
cn/4
cn/4
cn/4
cn/4
cn
c c c c c • • • c c
cn
n
(d)
Total: cn log n + cn

Resolução de recorrências

- Tem-se que:
  - Na parte (a), há T(n) ainda não expandido
  - Na parte (b), T(n) foi dividido em árvores equivalentes representando a recorrência com custos divididos (T(n/2) cada uma), sendo cn o custo no nível superior da recursão (fora da recursão e, portanto, associado ao nó raiz)
  - ...
  - No fim, nota-se que a altura da árvore corresponde a (log n)+1, que é o número de vezes do custo dos níveis (iguais a n)
    - Como resultado, tem-se cn logn + cn, ou seja, O(n log n)

Precauções

- A análise assintótica é uma ferramenta fundamental ao projeto, análise ou escolha de um algoritmo específico para uma dada aplicação

- No entanto, deve-se ter sempre em mente que essa análise "esconde" fatores assintoticamente irrelevantes, mas que em alguns casos podem ser relevantes na prática, particularmente se o problema de interesse se limitar a entradas (relativamente) pequenas

  - Por exemplo, um algoritmo com tempo de execução da ordem de $10^{100}n$ é $O(n)$, assintoticamente melhor do que outro com tempo $10\, n \log n$, o que nos faria, em princípio, preferir o primeiro

  - No entanto, 10^{100} é o número estimado por alguns astrônomos como um limite superior para a quantidade de átomos existente no universo observável!

Análise de algoritmos recursivos

- Exercícios: pesquisa binária pelo número 3

Arranjo ordenado

1	3	5	6	8	11	15	16	17

É o elemento procurado?

1	3	5	6	8	11	15	16	17

É o elemento procurado?

1	3	5	6	8	11	15	16	17

É o elemento procurado?

Análise de algoritmos recursivos

- Implemente o algoritmo da busca binária em um arranjo ordenado

Análise de algoritmos recursivos

- Teste e analise o algoritmo

Análise de algoritmos recursivos

- Problema da maior soma de subseqüência em um arranjo

-2	11	-4	13	-5	-2

20

Análise de algoritmos recursivos

- Faça um algoritmo para resolver o problema e analise-o

Análise de algoritmos recursivos

- Idem para o Algoritmo de Euclides para calcular o máximo divisor comum para 2 números

Análise de algoritmos recursivos

- Idem para o Algoritmo para calcular x^n